

## DS 8 de mathématiques

## 1 Exercice – Deux questions d'asymptotique

1. (a) Notons  $S_n = \sum_{k=1}^n k \ln k$ , pour  $n \geq 1$ . Comme  $t \mapsto t \ln t$  est croissante sur  $[1, +\infty[$ , on a

$$k \ln k \leq \int_k^{k+1} t \ln t dt \leq (k+1) \ln(k+1),$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . On somme pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , avec  $n \geq 2$  :

$$S_n - n \ln n \leq \int_1^n t \ln t dt \leq S_n - 1 \ln 1 = S_n.$$

Comme  $n \ln n = o(n^2)$ , on en déduit que

$$S_n = \int_1^n t \ln t dt + o(n^2) = \left[ \frac{t^2}{2} \ln t \right]_1^n - \int_1^n \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} dt + o(n^2) = \frac{n^2 \ln n}{2} - \frac{n^2}{4} + o(n^2).$$

- (b) Notons  $u_n$  cette expression. Pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n > 0$  et

$$\ln u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \ln k = \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{4} + o(1),$$

d'après la question précédente. En passant à l'exponentielle, on obtient :

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{e^{1/4}} (1 + o(1)) \sim \frac{\sqrt{n}}{e^{1/4}}.$$

2. (a) Notons  $f_\lambda$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f_\lambda(x) = x^\lambda - e^{1/x}$ . Comme  $x \mapsto x^\lambda$  est strictement croissante et que  $x \mapsto e^{1/x}$  est strictement décroissante (par composition),  $f_\lambda$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus,  $\lim_0 f_\lambda = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} f_\lambda = +\infty$ . Par théorème des valeurs intermédiaires ( $f_\lambda$  est continue par opérations élémentaires) et stricte croissante, l'équation  $f_\lambda(x) = 1$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- (b) D'une part,  $f_\lambda(1) = 1 - e^1 = 1 - e < 0$ . D'autre part,  $f_\lambda\left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) = \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)^\lambda - e^{1/(1+2/\lambda)}$  tend vers  $e^2 - e > 0$ , quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Par croissance de  $f_\lambda$ , on en déduit que pour  $\lambda$  assez grand :  $1 < x_\lambda \leq 1 + \frac{2}{\lambda}$ . En particulier, par comparaison,  $x_\lambda \rightarrow 1$ , quand  $\lambda \rightarrow +\infty$  (le calcul montre même que  $x_\lambda = 1 + O(1/\lambda)$ .)

(c) On écrit  $x_\lambda = 1 + y_\lambda$ . Par la question précédente,  $y_\lambda = o(1)$ . On a

$$(1 + y_\lambda)^\lambda = \exp\left(\frac{1}{1 + y_\lambda}\right).$$

On passe au logarithme :

$$\forall \lambda > 0, \lambda \ln(1 + y_\lambda) = \frac{1}{1 + y_\lambda}.$$

Le membre de gauche est équivalent à  $\lambda y_\lambda$  et celui de droite tend vers 1 (quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ ) ; donc  $y_\lambda \sim \frac{1}{\lambda}$ .

On écrit maintenant  $y_\lambda = \frac{1}{\lambda} + z_\lambda$  ; et on a  $z_\lambda = o(1/\lambda)$ . On reprend l'égalité précédente :

$$\forall \lambda > 0, \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda} + z_\lambda\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda} + z_\lambda}.$$

D'une part,

$$\lambda \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda} + z_\lambda\right) = \lambda\left(\frac{1}{\lambda} + z_\lambda - \frac{1}{2\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = 1 + \lambda z_\lambda - \frac{1}{2\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

D'autre part,

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda} + z_\lambda} = 1 + \frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

En égalisant les deux expressions et en simplifiant, on obtient :

$$\lambda^2 z_\lambda - \frac{1}{2} = 1 + o(1).$$

Donc,  $z_\lambda \sim \frac{3}{2\lambda^2}$ . Finalement,

$$x_\lambda = 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{3}{2\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

## 2 Exercice – Un équivalent de $\sum_{k=1}^n k^p Q^k$

1. (a) Soit  $x > 1$ . Pour tout  $t \in [1, x]$ , on a  $t^p e^t \leq x^p e^t$ . Par croissance de l'intégrale, en intégrant entre 1 et  $x$ , on a

$$0 \leq I_p(x) = \int_1^x t^p e^t dt \leq x^p \int_1^x e^t dt = x^p (e^x - 1).$$

Le membre de droite est un  $O(x^p e^x)$ , donc  $I_p(x) = O(x^p e^x)$ .

- (b) Soit  $x \geq 2$ .

- Pour tout  $t \in [1, x/2]$ , on a  $t^p e^t \leq e^t$ , car  $t^p \leq 1$ .  
En intégrant entre 1 et  $x/2$  :  $\int_1^{x/2} t^p e^t dt \leq \int_1^{x/2} e^t dt = e^{x/2} - 1 \leq e^{x/2}$ .
- Pour tout  $t \in [x/2, x]$ , on a  $t^p e^t \leq \left(\frac{x}{2}\right)^p e^t$ .  
En intégrant,  $\int_{x/2}^x t^p e^t dt \leq \left(\frac{x}{2}\right)^p (e^x - e^{x/2}) \leq \left(\frac{x}{2}\right)^p e^x$ .

On somme les inégalités ; par relation de Chasles, on obtient  $I_p(x) \leq e^{x/2} + \left(\frac{x}{2}\right)^p e^x$ . Les deux termes sont des  $O(x^p e^x)$  : c'est clair pour le deuxième et vient de ce que  $x^{-p} = O(e^{x/2})$  par croissance comparée, pour le premier.  
On a donc encore  $I_p(x) = O(x^p e^x)$ .

(c) Par intégration par parties, on a

$$\int_1^x t^p e^t dt = [t^p e^t]_1^x - \int_1^x p t^{p-1} e^t dt.$$

Donc,  $I_p(x) = x^p e^x - p I_{p-1}(x) - e$ .

(d) Dans la relation précédente,  $I_{p-1}(x) = O(x^{p-1} e^x) = o(x^p e^x)$ . De plus,  $x^p e^x \rightarrow +\infty$ , quand  $x \rightarrow +\infty$  (par croissance comparée si  $p < 0$ ). Donc,  $e$  est aussi un  $o(x^p e^x)$ .  
Ainsi,

$$I_p(x) \sim x^p e^x.$$

2. Comme  $Q^t = e^{t \ln Q}$ , il est naturel de faire le changement de variable  $u = t \ln Q$ . On obtient :

$$I_{p,Q}(x) = \int_{\ln Q}^{x \ln Q} \frac{u^p}{(\ln Q)^p} e^u \frac{du}{\ln Q} = \frac{I_p(x \ln Q)}{(\ln Q)^{p+1}} + O(1),$$

où le  $O(1)$  tient compte de la partie de l'intégrale (constante) entre 1 et  $\ln Q$ .

Avec la question précédente,  $I_{p,Q}(x) \sim \frac{x^p e^{x \ln Q}}{\ln Q} = \frac{1}{\ln Q} x^p Q^x$ .

3. (a) Pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on a  $k^p Q^k \leq \int_k^{k+1} t^p Q^t dt$ , car  $Q > 1$ . En sommant de 1 à  $n-1$ ,

$$0 \leq S_{n,p,Q} - n^p Q^n \leq \int_1^n t^p Q^t dt = I_{p,Q}(n).$$

L'équivalent de la question précédente donne  $S_{n,p,Q} = O(n^p Q^n)$ .

(b) On suit l'indication.

$$\begin{aligned} S_{n,p,Q} &= \frac{1}{Q-1} \sum_{k=1}^n k^p (Q^{k+1} - Q^k) \\ &= \frac{1}{Q-1} \left( \sum_{\ell=2}^{n+1} (\ell-1)^p Q^\ell - \sum_{k=1}^n k^p Q^k \right) \\ &= \frac{1}{Q-1} \left( \sum_{k=1}^n ((k-1)^p - k^p) Q^k + n^p Q^{n+1} \right) \end{aligned}$$

(c) Quand  $x \rightarrow +\infty$ , on a

$$x^p - (x-1)^p = x^p (1 - (1 - 1/x)^p) \sim px^{p-1} = O(x^{p-1}).$$

Donc, il existe  $A > 0$  tel que, pour  $k$  assez grand,  $|k^p - (k-1)^p| \leq Ak^{p-1}$ . Comme le membre de droite n'est jamais nul, on peut si besoin augmenter la valeur de  $A$  pour que l'inégalité soit valable pour tout  $k \geq 1$  (il y a un nombre fini de conditions supplémentaires, toutes remplies pour  $A$  assez grand).

(d) On a donc

$$S_{n,p,Q} = \frac{Q}{Q-1} n^p Q^n - T_{n,p,Q},$$

où  $T_{n,p,Q} = \sum_{k=1}^n (k^p - (k-1)^p) Q^k$ . Par inégalité triangulaire et la question précédente,  $|T_{n,p,Q}| \leq \sum_{k=1}^n A \sum_{k=1}^n k^{p-1} Q^k = O(n^{p-1} Q^n)$ , par la question (a). Ainsi,  $T_{n,p,Q} = o(n^p Q^n)$ . Donc,

$$S_{n,p,Q} \sim \frac{Q}{Q-1} n^p Q^n.$$

### 3 Problème – Sur la convergence au sens d'Abel

#### 3.1 Lemme de Toeplitz

1. Comme la suite  $(a_n)$  converge, elle est bornée. Il existe donc  $M > 0$  tel que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $|p_n(t)a_n| \leq Mp_n(t)$ . Comme la série  $\sum_{n \geq 1} Mp_n(t)$  converge, la série  $\sum_{n \geq 1} |p_n(t)a_n|$  converge, par comparaison de séries à termes positifs. D'où la convergence absolue de  $\sum_{n \geq 1} p_n(t)a_n$ .

2. On commence par écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)a_n - \ell = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)(a_n - \ell) - \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)\right)\ell.$$

Il suffit en effet d'écrire l'égalité sur les sommes partielles et de prendre la limite, tout étant convergent.

$$\text{On a de plus } \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)(a_n - \ell) = \sum_{n=1}^N p_n(t)(a_n - \ell) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n(t)(a_n - \ell).$$

On rassemble ces égalités. Par inégalité triangulaire (les  $p_n$  sont positifs), on a :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)a_n - \ell \right| \leq \sum_{n=1}^N p_n(t)|a_n - \ell| + \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n(t)|a_n - \ell| + \left| 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) \right| |\ell|.$$

On conclut en disant que  $p_n(t) \leq \max_{k \in [1, N]} (p_k(t))$ , si  $n \in [1, N]$ .

3. On fixe  $\varepsilon > 0$ . On peut trouver un entier  $N \geq 1$  tel que, si  $n > N$ ,  $|a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{6}$ . On

note  $S = \sum_{n=1}^N |a_n - \ell|$ .

Ensuite, pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on peut trouver  $\delta_k \in ]0, 1[$  tel que, si  $t \in [1 - \delta_k, 1[$ , alors  $p_k(t) \leq \frac{\varepsilon}{3(S+1)}$  (car les  $p_k(t)$  tendent vers 0 en 1.) Enfin, on peut trouver un tel

$\delta_0 \in ]0, 1[$  tel que  $\left| 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3(|\ell|+1)}$  si  $t \in ]1 - \delta_0, 1[$  (car  $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) \rightarrow 1$ , quand  $t$  tend vers 1).

Posons  $\delta = \min(\delta_0, \dots, \delta_N)$ . Par la question précédente, si  $t \in [1 - \delta, 1[$ , on a :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) a_n - \ell \right| \leq \frac{\varepsilon}{3(S+1)} \times S + \frac{\varepsilon}{6} \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n(t) + \frac{\varepsilon}{3(|\ell|+1)} |\ell|.$$

Quitte à diminuer encore  $\delta$ , on peut de plus supposer que, si  $t \in [1 - \delta, 1[$ ,  $\sum_{n=N+1}^{\infty} p_n(t) \leq$

$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) \leq 2$  (car cette somme tend vers 1 quand  $t \rightarrow 1$ ). On obtient alors que si

$$t \in [1 - \delta, 1[, \left| \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) a_n - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

Donc,  $\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) a_n = \ell$ .

### 3.2 Théorème d'Abel

4. (a) Comme la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  est convergente,  $u_n = O(1)$  et donc  $|u_n t^n| = O(t^n)$ . Par

comparaison avec une série géométrique de raison  $t \in [0, 1[$ , la série  $\sum_{n \geq 1} u_n t^n$

converge absolument.

(b) On calcule, en convenant que  $U_0 = 0$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n t^n &= \sum_{n=1}^N (U_n - U_{n-1}) t^n \\ &= \sum_{n=1}^N U_n t^n - \sum_{n=0}^{N-1} U_n t^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} (t^n - t^{n+1}) U_n + U_N t^N. \end{aligned}$$

(c) Pour tout  $n \geq 1$  et tout  $t \in [0, 1[$ , on note  $p_n(t) = t^n - t^{n+1}$ . On remarque :

- Les  $p_n$  sont à valeurs positives ;
- Pour tout  $n \geq 1$ ,  $p_n(t) = t^n - t^{n+1} \rightarrow 1 - 1 = 0$ , quand  $t \rightarrow 1$  ;

- Pour tout  $t \in [0, 1[$ , la série  $\sum_{n \geq 1} p_n(t)$  est convergente de somme  $t$  (par télescopage)

et donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) \rightarrow 1$ , quand  $t \rightarrow 1$ .

Les hypothèses du lemme de Toeplitz sont donc satisfaites ; comme  $U_n \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  par

définition, on en déduit que  $\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} (t^n - t^{n+1})U_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ . Par ailleurs, en faisant

tendre  $N$  vers l'infini dans la question précédente, on a  $\sum_{n=1}^{+\infty} (t^n - t^{n+1})U_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n t^n$ .

D'où  $\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .

## 5. Une application.

- (a) La fonction  $f_N$  est dérivable et on a, pour tout  $t \in [0, 1[$  :

$$f'_N(t) = e^{i\theta} \sum_{n=0}^{N-1} (te^{i\theta})^n = e^{i\theta} \frac{1 - (e^{i\theta}t)^N}{1 - e^{i\theta}t} = -\frac{1 - (e^{i\theta}t)^N}{t - e^{-i\theta}}.$$

Comme  $f_N(0)$ , on a par le théorème fondamental de l'analyse :

$$f_N(t) = -\int_0^t \frac{1 - (e^{i\theta}u)^N}{u - e^{-i\theta}} du.$$

- (b) La suite de fonctions  $g_N : u \mapsto \frac{1 - (e^{i\theta}u)^N}{u - e^{-i\theta}}$ , définies sur  $[0, t]$ , converge uniformément

vers  $g : u \mapsto \frac{1}{u - e^{-i\theta}}$ . En effet, on a la majoration  $\left| \frac{(e^{i\theta}u)^N}{u - e^{-i\theta}} \right| \leq \frac{t^N}{m}$ , où  $m$  est le minimum de  $|u - e^{-i\theta}|$  sur  $[0, t]$  ( $m > 0$  par TBA). Ce majorant tend vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$ , indépendamment de  $u$ , d'où la convergence uniforme. On en déduit que

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} -\int_0^t \frac{1 - (e^{i\theta}u)^N}{u - e^{-i\theta}} du = -\int_0^t \frac{1}{u - e^{-i\theta}} du.$$

Pour la deuxième égalité, on doit calculer cette intégrale. Soit  $u \in [0, t]$ . On a :

$$\frac{1}{u - e^{-i\theta}} = \frac{u - e^{i\theta}}{|u - e^{i\theta}|^2}.$$

On a  $u - e^{i\theta} = (u - \cos \theta) - i \sin \theta$  donc  $|u - e^{i\theta}|^2 = u^2 - 2u \cos \theta + 1$ . D'où,

$$\frac{1}{u - e^{-i\theta}} = \frac{u - \cos \theta}{u^2 - 2u \cos \theta + 1} - i \frac{\sin \theta}{u^2 - 2u \cos \theta + 1}.$$

Une primitive de la partie réelle est  $u \mapsto \frac{1}{2} \ln(u^2 - 2u \cos \theta + 1) = \frac{1}{2} \ln |u - e^{-i\theta}|^2 = \ln |u - e^{-i\theta}|$ .

La partie imaginaire peut être réécrite  $-\frac{\sin \theta}{(u - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2}$ , de primitive  $u \mapsto -\operatorname{Arctan} \left( \frac{u - \cos \theta}{\sin \theta} \right)$ . On obtient finalement :

$$f(t) = -\left( \ln |t - e^{-i\theta}| - \ln |0 - e^{-i\theta}| - i \operatorname{Arctan} \left( \frac{t - \cos \theta}{\sin \theta} \right) + i \operatorname{Arctan} \left( \frac{-\cos \theta}{\sin \theta} \right) \right).$$

Or,  $\frac{-\cos \theta}{\sin \theta} = -\cotan \theta = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)$ , de sorte que  $-\operatorname{Arctan} \left( \frac{-\cos \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{\pi}{2} - \theta$ . D'où la formule annoncée.

(c) Par le théorème d'Abel, on sait que  $f(t) \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ , quand  $t \rightarrow 1$ .

Le membre de droite de l'égalité précédente est continu par rapport à  $t \in [0, 1]$ , on a donc, en passant à la limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln |1 - e^{-i\theta}| + i \operatorname{Arctan} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) + i \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

Par méthode de l'angle moitié, on a  $|1 - e^{-i\theta}| = |2i \sin(-\theta/2)| = 2 \sin(\theta/2)$  (car  $\theta \in ]0, \pi[$ ).

On peut de plus écrire  $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin^2(\theta/2)}{2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)} = \tan(\theta/2)$ . Et comme  $\theta/2 \in ]0, \pi/2[$ ,  $\operatorname{Arctan}(\tan(\theta/2)) = \theta/2$ .

On obtient ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln (2 \sin(\theta/2)) + i \left( \frac{\pi - \theta}{2} \right).$$

### 3.3 Convergence au sens de Cesàro et au sens d'Abel

6. On constate immédiatement que  $U_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}$  vaut 1 si  $n$  est impair et 0 si  $n$  est pair. Donc,  $U_1 + \dots + U_n = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \sim \frac{n}{2}$  et  $\frac{U_1 + \dots + U_n}{n} \rightarrow 1/2$ .

Ainsi,  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}$  converge au sens de Cesàro et  $\sum_{n \geq 1}^c (-1)^{n-1} = \frac{1}{2}$ .

7. Soit  $\sum_{n \geq 1} u_n$  une série à termes positifs, convergente au sens de Cesàro. Comme la

suite  $(U_n)$  des sommes partielles est croissantes, on a, si  $n$  est pair,  $\frac{U_1 + \dots + U_n}{n} \geq \frac{U_{n/2+1} + \dots + U_n}{n} \geq \frac{n}{2} \times \frac{U_{n/2}}{n} \geq \frac{U_{n/2}}{2}$ . Comme le membre de gauche converge,  $U_{n/2}$  ne tend pas vers  $+\infty$  ; comme  $(U_n)$  est croissante, elle converge. Donc,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge au sens habituel.

8. On suppose que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge au sens de Cesàro.

Alors,  $\frac{U_n}{n} = \frac{U_1 + \dots + U_n}{n} - \frac{U_1 + \dots + U_{n-1}}{n-1} \frac{n-1}{n}$ . Ceci tend vers  $\sum_{n \geq 1} u_n - \sum_{n \geq 1} u_n \times 1 = 0$  par opérations élémentaires sur les limites. Donc,  $U_n = o(n)$ .

9. On considère la suite  $u_n = \frac{1}{n}$ . On sait que  $U_n = H_n \sim \ln n = o(n)$ . Cependant,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  ne converge pas au sens de Cesàro : en effet, c'est une série à termes positifs et elle ne converge pas au sens usuel (on utilise la question 7).

### 10. Théorème de Frobenius.

(a) Par la question 8,  $U_n = o(n)$ . On a donc aussi  $u_n = U_n - U_{n-1} = o(n)$ . De plus, on peut trouver  $A > 0$  tel que  $|U_n| \leq An$  pour tout  $n \geq 1$  (on peut même prendre  $A$  quelconque, avec  $n$  assez grand, mais on n'en aura pas besoin). Donc,  $|\sum_{k=1}^N U_k| \leq A \sum_{k=1}^N k = O(N^2)$ . Ainsi,  $u_n t^n$ ,  $U_n t^n$  et  $\sum_{k=1}^n t^k$  sont des  $O(n^2 t^n)$  donc des  $o(u^n)$  si  $t < u < 1$ . Par comparaison avec une série géométrique, toutes ces séries convergent absolument.

(b) Soit  $N \geq 1$ . On calcule :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left( \frac{U_1 + \dots + U_n}{n} \right) (1-t)^2 n t^n \\ &= \sum_{n=1}^N (U_1 + \dots + U_n) (1-t)^2 t^n \\ &= \sum_{n=1}^N (U_1 + \dots + U_n) (t^n - 2t^{n+1} + t^{n+2}) \\ &= \sum_{n=1}^N (U_1 + \dots + U_n) t^n - 2 \sum_{n=2}^{N+1} (U_1 + \dots + U_{n-1}) t^n + \sum_{n=3}^{N+2} (U_1 + \dots + U_{n-2}) t^n \\ &= U_1 t + (U_1 + U_2) t^2 - 2U_1 t^2 + 2(U_1 + \dots + U_N) t^{N+1} \\ &\quad + (U_1 + \dots + U_{N-1}) t^{N+1} + (U_1 + \dots + U_N) t^{N+2} + \sum_{n=3}^N (U_n - U_{n-1}) t^n. \end{aligned}$$

Quand on prend la limite  $N \rightarrow +\infty$ , les termes centraux de la forme  $(U_1 + \dots + U_N) t^N$  tendent vers 0 (car ce sont les termes de séries convergentes) ; on a donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{U_1 + \dots + U_n}{n} \right) (1-t)^2 n t^n = U_1 t + (U_2 - U_1) t^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} u_n t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n t^n.$$

(c) Pour  $n \geq 1$  et  $t \in [0, 1[$ , on note  $p_n(t) = (1-t)^2 n t^n$ . On vérifie que :

- Les  $p_n$  sont à valeurs positives ;

- À  $n$  fixé,  $p_n(t) \rightarrow$  quand  $t \rightarrow 1$  ;
- Pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $\sum_{n \geq 1} p_n(t)$  est convergente (arguments similaires au précédents).

De plus,  $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) = t$  (le plus simple est d'appliquer la formule précédente avec

la suite  $(u_n)$  donnée par  $u_1 = 1$  et  $u_n = 0$  si  $n \geq 2$  ; le facteur  $\frac{U_1 + \dots + U_n}{n}$

vaut alors tout le temps 1.) et donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) \rightarrow 1$ , quand  $t \rightarrow 1$ .

On peut donc appliquer le lemme de Toeplitz et conclure que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{U_1 + \dots + U_n}{n} \right) p_n(t) \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_1 + \dots + U_n}{n} = \sum_{n \geq 1} u_n.$$

Par la formule de la question précédente, cela revient à dire que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge au

sens d'Abel et que  $\sum_{n \geq 1}^A u_n = \sum_{n \geq 1}^C u_n$ .

### 3.4 Calculs de sommes de séries divergentes

11. (a) On reconnaît une somme géométrique. Donc,

$$f_N(t) = t \frac{1 - (-t)^N}{1 + t}.$$

On écrit  $t = (1 + t) - 1$  et on obtient :

$$f_N(t) = 1 - (-t)^N - \frac{1 - (-t)^N}{1 + t}.$$

- (b) On note  $p_N(t) = 1 - (-t)^N$ . Les dérivées de  $p_N$  se calculent immédiatement et on a facilement que  $p_N^{(k)}(t)$  tend vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$ , pour tout  $k \geq 1$ .

Notons  $g : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ . Par formule de Leibniz, la dérivée  $k$ -ème de  $t \mapsto \frac{p_N(t)}{1+t} =$

$p_N(t)g(t)$  est donnée par  $t \mapsto \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} p_N^{(i)}(t) g^{(k-i)}(t)$ . Quand  $N \rightarrow +\infty$ , seul le terme pour  $i = 0$  ne tend pas vers 0. Ainsi,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} f_N^{(k)}(t) = -g^{(k)}(t) = k! \frac{(-1)^{k+1}}{(1+t)^{k+1}},$$

par une récurrence immédiate.

- (c) En dérivant  $k$  fois  $f_N$  directement (pour  $N > k$ ), on a

$$f_N^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^N (-1)^{n-1} (n-1) \dots (n-k+1) t^{n-k} = k! \sum_{n=k}^N (-1)^{n-1} \binom{n}{k} t^{n-k}.$$

D'après la question précédente, on peut donc passer à la limite  $N \rightarrow +\infty$  :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{n}{k} t^{n-k} = \frac{(-1)^{k+1}}{(1+t)^{k+1}}.$$

On peut encore écrire cette relation comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{n}{k} t^n = \frac{(-1)^{k+1} t^k}{(1+t)^{k+1}},$$

en convenant que  $\binom{n}{k} = 0$  si  $n < k$ .

Le membre de droite tend vers  $\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}$ . Par définition, la série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \binom{n}{k}$

converge donc au sens d'Abel et  $\sum_{n \geq 1}^A (-1)^{n-1} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}$ .

12. (a) La série définissant  $\eta(s)$  est alternée et la valeur absolue de son terme général tend vers 0 en décroissant si  $s > 0$ . Par le critère des séries alternées, cette série converge au sens usuel, donc au sens d'Abel par la partie 3.2.

(b) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , notons  $P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$ . La famille des  $P_k$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$  car  $P_k$  est de degré  $k$  pour tout  $k$ . En particulier, si  $j \in \mathbb{N}$ , on peut trouver des réels  $a_0, \dots, a_j$  tels que  $X^j = \sum_{k=0}^j a_k P_k$ . En évaluant en  $n \geq 1$ ,

on a  $n^j = \sum_{k=0}^j a_k \binom{n}{k}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^j$  est une

combinaison linéaire des séries  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \binom{n}{k}$ , pour  $k \in \llbracket 0, j \rrbracket$ . Comme toutes

ces séries sont convergentes au sens d'Abel (y compris pour  $k = 0$ , Q6 montre la convergence au sens de Cesàro et elle implique la convergence au sens d'Abel) et que la convergence au sens d'Abel est stable par combinaisons linéaires (immédiat), la série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^j$  est convergente au sens d'Abel pour tout  $j \geq 0$ . Cela revient

à dire que  $\eta(s)$  est bien défini si  $s$  est un entier négatif.

(c) •  $\eta(0) = \sum_{n \geq 1}^A (-1)^{n-1} = 1/2$  par la question 6.

•  $\eta(-1) = \sum_{n \geq 1}^A (-1)^{n-1} n = \sum_{n \geq 1}^A (-1)^{n-1} \binom{n}{1} = \frac{1}{4}$  par Q11.

•  $\eta(-2) = \sum_{n \geq 1}^A (-1)^{n-1} n^2 = \sum_{n \geq 1}^A (-1)^{n-1} \left( 2 \binom{n}{2} + \binom{n}{1} \right) = 2 \times \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = 0$ , par Q11.

13. (a) Pour  $s > 1$ , on a

$$\zeta(s) - \eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - (-1)^{n-1}) \frac{1}{n^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k)^s} = 2^{1-s} \zeta(s).$$

D'où  $\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}$ .

(b) Avec Q12, on obtient :

- $\zeta(0) = \frac{1/2}{1-2} = -\frac{1}{2}$  ;
- $\zeta(-1) = \frac{1/4}{1-2^2} = -1/12$  ;
- $\zeta(-2) = 0$ .