<u>Thm</u> : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $j \in [\![1,n]\!]$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A)$$, où

$\Delta_{i,j}(A)$ mineur de A en pos° (i,j).

<u>Dém</u> : Notons C_j la j° colonne de A et $E_1, \dots, E_n$ les vect de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, écrits en colonne.

On a $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} E_i$; donc, par n-linéarité :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(A_i)$$

où A_i a les mêmes colonnes que A, sauf la j° remplacée par E_i.

On échange les lignes de A selon le cycle $(1\ 2 \cdots i)$ et les colonnes selon le cycle $(1\ 2 \cdots j)$. Les signatures sont $(-1)^{i-1}$ et $(-1)^{j-1}$ donc

$$\det A_i = \begin{vmatrix} 1 & * \\ 0 & \\ \vdots & \tilde{A}_i \\ 0 & \end{vmatrix} \times (-1)^{i-1} \times (-1)^{j-1}$$

où $\tilde{A}_i$ est obtenu à partir de A en enlevant colonne j et ligne i.
Par déf°, $\det \tilde{A}_i = \Delta_{i,j}(A)$

Donc, par produit par blocs,

$$\det A_i = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

Et donc $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$