Compléments sur les groupes finis

1 Groupe symétrique

EXERCICE 1. ♣ – ◐○○ *Décomposition en produit de cycles*
Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints.
En déduire leur signature et leur puissance 23.

1. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 8 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
2. $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2. ●◐○ *Ordre d'une permutation*

1. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Déterminer l'ordre de σ en fonction de la longueur des cycles intervenant dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 12 dans $\mathscr{S}_7$?

EXERCICE 3. ♣ – ●◐○ *Morphismes de $\mathscr{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$*
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que $(k\,l) = (j\,l)(i\,k)(i\,j)(i\,k)(j\,l)$ si i, j, k, l sont deux à deux distincts dans $[\![1, n]\!]$.
2. Deux éléments g et g' d'un groupe G sont conjugués s'il existe $h \in G$ tel que $g = hg'h^{-1}$. Montrer que deux transpositions quelconques sont conjuguées.
3. Soit $\phi : \mathscr{S}_n \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes. On fixe une transposition τ.

   Montrer que $\phi(\tau) = \pm 1$ et que, pour toute autre transposition τ', $\phi(\tau) = \phi(\tau')$.
4. En déduire que les seuls morphismes de groupe de $\mathscr{S}_n$ vers $\mathbb{C}^*$ sont l'application constante égale à 1 et la signature.

EXERCICE 4. ●◐○ *Centre de $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$*

1. Soit $n \geq 3$. Soient $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$, soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Que vaut $\sigma \circ (i\,j) \circ \sigma^{-1}$?
2. En déduire que le centre de $\mathscr{S}_n$ est trivial.
3. On note $\mathscr{A}_n$ le sous-groupe de $\mathscr{S}_n$ des permutations σ telles que $\varepsilon(\sigma) = 1$.
   Montrer que si $n \geq 4$, le centre de $\mathscr{A}_n$ est trivial.

EXERCICE 5. ♣ – ●◐○ *Classes de conjugaison dans $\mathscr{S}_n$*

1. Soit $\tau = (i_1\, i_2 \dots i_p)$ un p-cycle de $\mathscr{S}_n$, soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Que vaut $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$?

2. En déduire que deux permutations de $\mathscr{S}_n$ sont conjuguées ssi, dans leur décomposition en produit de cycles à support disjoint, il y a le même nombre de p-cycles, pour tout $p \in [\![2, n]\!]$.

EXERCICE 6. ♣ – ●●◐ *Automorphismes de $\mathscr{S}_n$*
On cherche à caractériser les automorphismes de $\mathscr{S}_n$, pour $n \neq 6$. Soit ϕ un tel automorphisme.

1. Si τ est une transposition de $\mathscr{S}_n$, que dire de l'ordre de $\phi(\tau)$?

2. En raisonnant sur le nombre d'éléments commutant avec τ et sur le nombre d'éléments commutant avec $\phi(\tau)$, montrer que $\phi(\tau)$ est une transposition.

3. En déduire que ϕ est un automorphisme intérieur :

$$\exists \alpha \in \mathscr{S}_n : \forall \sigma \in \mathscr{S}_n, \phi(\sigma) = \alpha\sigma\alpha^{-1}.$$

EXERCICE 7. ◇ – ●●◐ *Jeu de taquin*
Vous venez d'obtenir ce jeu de taquin dans votre paquet de céréales. Pouvez-vous le résoudre ?

4	1	3
5	2	7
8	6	

EXERCICE 8. ♣ – ●●● *L'énigme des* 100 *prisonniers*
100 prisonniers sont enfermés dans une pièce. Dans une autre pièce se trouvent 100 coffres numérotés de 1 à 100, chaque coffre renfermant le nom de l'un des prisonniers. A tour de rôle, chaque prisonnier se rendra dans la salle des coffres ; il pourra ouvrir successivement jusqu'à 50 coffres, en consultant chaque fois le nom qui s'y trouve.
L'ensemble des prisonniers sera libéré si chacun a découvert son propre nom, lors de son passage dans la salle des coffres. Ils peuvent décider d'une stratégie avant que le premier prisonnier aille dans la salle, mais ils ne peuvent plus communiquer ensuite (et les coffres sont refermés après chaque passage). La situation est-elle désespérée ?

2 Exemples de groupes finis

EXERCICE 9. ●◐○ *Deux questions fini/infini*
Existe-t-il

1. un groupe infini dont tous les éléments sont d'ordre fini ?

2. un groupe infini ayant un nombre fini de sous-groupes ?

EXERCICE 10. ●●○ *Groupes diédraux*
Soit $n \geq 3$. Soit D_{2n} l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{U}_n \to \mathbb{U}_n$ telles que

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n, |f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|.$$

1. Montrer que $(D_{2n}, \circ)$ est un groupe.
2. Déterminer l'ordre de l'élément $r : z \mapsto e^{2i\pi/n} z$.
3. Montrer que $\mathrm{id}_{\mathbb{U}_n}$ est le seul élément $f \in D_{2n}$ ayant 1 et $e^{2i\pi/n}$ comme points fixes.
4. Décrire explicitement D_{2n}. Quel est son cardinal ? Est-ce un groupe commutatif ?
5. Déterminer tous les éléments d'ordre 2 de D_{2N} et exprimer r comme composée de deux tels éléments.
6. Déterminer les morphismes de D_{2n} dans $\mathbb{U}_2$.
   On pourra traiter d'abord le cas n impair puis le cas $n = 4$.

EXERCICE 11. ●●◐ *Groupes de cardinal* 8

1. Soit G un groupe abélien de cardinal 8. En faisant une disjonction de cas sur le plus grand ordre d'un élément de G, montrer que G est isomorphe à un (et un seul) des groupes :
   - $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$;
   - $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
   - $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.
2. Soit Q un ensemble de cardinal 8, dont on note les éléments ± 1, $\pm i$, $\pm j$ et $\pm k$. Montrer qu'il existe une unique loi de groupe sur Q telle que
   - 1 est l'élément neutre ;
   - $\forall a \in \{1, i, j, k\}, (-1) \times (\pm a) = \pm a \times (-1) = \mp a$;
   - $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.
   - Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 1, 2, 4 et 8 dans Q ? En déduire que Q n'est pas isomorphe au groupe diédral D_4.
3. (***) Montrer que les 5 groupes de cardinal 8 qu'on a décrits sont les seuls, à isomorphisme près.

Indications

Exercice 8. Coder une position de taquin par une permutation et montrer que la signature de cette permutation est invariante lors d'un déplacement du taquin.