

## DM 19 - Déterminant de Cauchy - Théorème de Cayley-Hamilton

### 1 Déterminant de Cauchy

On se donne  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_i + b_j \neq 0$ . On cherche à calculer le déterminant  $\Delta_n$  de la matrice  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , de terme général  $C_{i,j} = \frac{1}{a_i + b_j}$ .

1. Que vaut  $\Delta_n$  s'il existe deux indices  $i \neq i' \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $a_i = a_{i'}$  ?

On suppose désormais les  $a_i$  deux à deux distincts. On note  $R$  la fonction rationnelle définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$  par  $R(x) = \frac{(b_1 - x) \dots (b_{n-1} - x)}{(x + a_1) \dots (x + a_n)}$ .

2. Montrer qu'il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, R(x) = \frac{\lambda_1}{x + a_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{x + a_n}.$$

Déterminer pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  la valeur de  $\lambda_k$ .

3. On note  $L_1, \dots, L_n$  les lignes de  $C$ . En opérant sur les lignes de  $C$  pour transformer  $L_n$  en  $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$ , montrer que  $\lambda_n \Delta_n = R(b_n) \Delta_{n-1}$ , où  $\Delta_{n-1}$  est le déterminant de  $(C_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n-1}$ .
4. En déduire par récurrence la valeur de  $\Delta_n$ .

### 2 Théorème de Cayley-Hamilton

#### 2.1 Matrice compagne

Soit  $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$  un polynôme unitaire de degré  $n \geq 1$ , à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . La *matrice compagne*<sup>1</sup> de  $P$  est la matrice  $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On note  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  et on identifie  $\mathbb{K}^n$  à  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

1. Déterminer, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la valeur de  $C_P^k e_1$ .

<sup>1</sup>La terminologie *matrice compagnon* est plus usuelle, mais elle est assez curieuse.

2. Montrer que  $P(C_P)e_1 = 0$ .
3. En déduire que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $P(C_P)e_k = 0$ , puis que  $P(C_P) = 0$ .
4. Montrer que  $P$  est le polynôme minimal de  $C_P$ .

## 2.2 Polynôme caractéristique<sup>2</sup>

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On définit le *polynôme caractéristique* de  $A$  par  $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ . Plus précisément, on note pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $p_{i,j} = \delta_{i,j}X - a_{i,j} \in \mathbb{K}_1[X]$  et alors

$$\chi_A(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) p_{\sigma(1),1} \dots p_{\sigma(n),n}.$$

5. Montrer que  $\chi_A$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ .
6. Montrer que les racines de  $\chi_A$  sont les valeurs propres de  $A$ .
7. En déduire que si  $\chi_A$  est scindé à racines simples, alors  $A$  est semblable à une matrice diagonale. Que dire de la réciproque ?
8. Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Si  $f$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, on peut donc définir son polynôme caractéristique  $\chi_f$ , comme le polynôme caractéristique de  $\text{Mat}_{\mathbf{e}}(f)$ ,  $\mathbf{e}$  étant une base quelconque de  $E$ .

### 9. Exemples :

- (a) On suppose que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est de rang  $r$  et vérifie  $A^2 = A$ . Déterminer  $\chi_A$ .
  - (b) On suppose que  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifie  $B^2 = I_n$  et que  $\dim \text{Ker}(B - I_n) = r$ . Déterminer  $\chi_B$ .
10. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$ . On note  $f_F \in \mathcal{L}(F)$  l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $F$ . Montrer que  $\chi_{f_F}$  divise  $\chi_f$ .

## 2.3 Théorème de Cayley-Hamilton

On propose une démonstration du théorème de Cayley<sup>3</sup>-Hamilton<sup>4</sup> :

Si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $\chi_f(f) = 0$ .

11. Soit  $P$  un polynôme unitaire de degré  $n$  ; on note  $C_P$  sa matrice compagne. Montrer que  $P = \chi_{C_P}$ . En déduire le théorème de Cayley-Hamilton pour  $C_P$ .
12. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , soit  $x \in E \setminus \{0\}$ . On note  $E_x = \text{Vect}((f^n(x))_{n \in \mathbb{N}})$ .
  - (a) Montrer que  $E_x$  est stable par  $f$  et qu'il existe  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$  est une base de  $E_x$ .
  - (b) Écrire la matrice de  $f_{E_x}$  dans cette base.
  - (c) En déduire que  $\chi_{f_{E_x}}(f_{E_x}) = 0$ .
13. Conclure la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

<sup>2</sup>Les questions 5-8 ont été traitées en cours. Vous pouvez les passer, mais vérifiez que vous avez bien compris les arguments !

<sup>3</sup>Arthur Cayley, 1821-1895

<sup>4</sup>William Hamilton, 1805-1865