

Semaine 24 - Déterminants

1 Déterminant d'une famille de vecteurs

- Introduction : aire orientée d'un parallélogramme dans le plan
- Forme k -linéaire sur E ; elles forment un espace vectoriel
- Exemple de $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, du produit mixte dans \mathbb{R}^3
- Forme k -linéaire alternée, forme k -linéaire anti-symétrique ; équivalence des deux notions (en caractéristique différente de 2) ; elles forment un espace vectoriel
- Si ϕ est k -linéaire alternée, si x_1, \dots, x_k sont des vecteurs, si σ est une permutation de $\llbracket 1, k \rrbracket$, $\phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\phi(x_1, \dots, x_k)$.
- Si E est un espace vectoriel de dimension n , l'ensemble des formes n -linéaires alternées est un espace vectoriel de dimension 1. Une telle forme ϕ est entièrement déterminée par $\phi(e_1, \dots, e_n)$, où (e_1, \dots, e_n) est une base de E .
- Déterminant dans une base \mathbf{e} . Notation $\det_{\mathbf{e}}$
- Si $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$, si x_1, \dots, x_n sont des vecteurs de E , si $x_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j}e_i$, alors

$$\det_{\mathbf{e}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n} \left(= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)} \right).$$

- Formule de changement de bases sur les déterminants
- Une famille de vecteurs (x_1, \dots, x_n) est une base de E ssi $\det_{\mathbf{e}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, pour une base \mathbf{e} quelconque de E

2 Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

- Déterminant d'un endomorphisme, défini comme le nombre λ tel que pour toute base \mathbf{e} et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathbf{e}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \lambda \det_{\mathbf{e}}(x_1, \dots, x_n)$.
- Pour toute base $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$, $\det(f) = \det_{\mathbf{e}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$
- f est un automorphisme ssi $\det(f) \neq 0$
- $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$; $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$; $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$ si f est un automorphisme
- Déterminant d'une matrice carrée, définie comme le déterminant de la famille de ses colonnes dans la base canonique de \mathbb{K}^n
- Si f endomorphisme de E , représenté par A dans une base \mathbf{e} , $\det A = \det f$

- Propriétés du déterminant matriciel (comme pour les endomorphismes); A est inversible ssi $\det A \neq 0$; deux matrices semblables ont même déterminant
- Formule pour $n = 2$ et $n = 3$ (règle de Sarrus)
- Déterminant d'une matrice triangulaire
- Déterminant de la transposée
- Le déterminant est n -linéaire alternée en les n lignes/les colonnes des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- Polynôme caractéristique d'une matrice; propriétés élémentaires

3 Aspects calculatoires

- Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs
- Développement selon une ligne ou une colonne
- Cofacteurs; comatrices; formule de Cramer : $A \operatorname{Com}(A)^T = (\det A)I_n$; formule pour A^{-1} si A est inversible
- Déterminant de Vandermonde; calcul et lien avec l'interpolation de Lagrange

4 Questions de cours

- Si $\dim E = n$, une forme n -linéaire alternée sur E est entièrement déterminée par sa valeur en une base (e_1, \dots, e_n) (*On ne demande pas réciproquement de montrer que la formule obtenue définit une forme n -linéaire alternée*)
- Déterminant d'un endomorphisme, défini comme le nombre $\det(f)$ tel que pour toute base \mathbf{e} et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathbf{e}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f)\det_{\mathbf{e}}(x_1, \dots, x_n)$. Et $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$.
- Formule de Cramer (en admettant le développement selon ligne/colonne)
- Calcul du déterminant de Vandermonde
- Calculs divers de déterminants