

DS 8 de mathématiques

1 Exercice – Deux questions d’asymptotique

1. (a) Notons $S_n = \sum_{k=1}^n k \ln k$, pour $n \geq 1$. Comme $t \mapsto t \ln t$ est croissante sur $[1, +\infty[$, on a

$$k \ln k \leq \int_k^{k+1} t \ln t dt \leq (k+1) \ln(k+1),$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On somme pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, avec $n \geq 2$:

$$S_n - n \ln n \leq \int_1^n t \ln t dt \leq S_n - 1 \ln 1 = S_n.$$

Comme $n \ln n = o(n^2)$, on en déduit que

$$S_n = \int_1^n t \ln t dt + o(n^2) = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_1^n - \int_1^n \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} dt + o(n^2) = \frac{n^2 \ln n}{2} - \frac{n^2}{4} + o(n^2).$$

- (b) Notons u_n cette expression. Pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ et

$$\ln u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \ln k = \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{4} + o(1),$$

d’après la question précédente. En passant à l’exponentielle, on obtient :

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{e^{1/4}} (1 + o(1)) \sim \frac{\sqrt{n}}{e^{1/4}}.$$

2. (a) Notons f_λ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f_\lambda(x) = x^\lambda - e^{1/x}$. Comme $x \mapsto x^\lambda$ est strictement croissante et que $x \mapsto e^{1/x}$ est strictement décroissante (par composition), f_λ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* . De plus, $\lim_0 f_\lambda = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f_\lambda = +\infty$. Par théorème des valeurs intermédiaires (f_λ est continue par opérations élémentaires) et stricte croissante, l’équation $f_\lambda(x) = 1$ admet une unique solution sur \mathbb{R}_+^* .

- (b) D’une part, $f_\lambda(1) = 1 - e^1 = 1 - e < 0$. D’autre part, $f_\lambda\left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) = \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)^\lambda - e^{1/(1+2/\lambda)}$ tend vers $e^2 - e > 0$, quand $\lambda \rightarrow +\infty$. Par croissance de f_λ , on en déduit que pour λ assez grand : $1 < x_\lambda \leq 1 + \frac{2}{\lambda}$. En particulier, par comparaison, $x_\lambda \rightarrow 1$, quand $\lambda \rightarrow +\infty$ (le calcul montre même que $x_\lambda = 1 + O(1/\lambda)$.)

(c) On écrit $x_\lambda = 1 + y_\lambda$. Par la question précédente, $y_\lambda = o(1)$. On a

$$(1 + y_\lambda)^\lambda = \exp\left(\frac{1}{1 + y_\lambda}\right).$$

On passe au logarithme :

$$\forall \lambda > 0, \lambda \ln(1 + y_\lambda) = \frac{1}{1 + y_\lambda}.$$

Le membre de gauche est équivalent à λy_λ et celui de droite tend vers 1 (quand $\lambda \rightarrow +\infty$) ; donc $y_\lambda \sim \frac{1}{\lambda}$.

On écrit maintenant $y_\lambda = \frac{1}{\lambda} + z_\lambda$; et on a $z_\lambda = o(1/\lambda)$. On reprend l'égalité précédente :

$$\forall \lambda > 0, \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda} + z_\lambda\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda} + z_\lambda}.$$

D'une part,

$$\lambda \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda} + z_\lambda\right) = \lambda\left(\frac{1}{\lambda} + z_\lambda - \frac{1}{2\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right) = 1 + \lambda z_\lambda - \frac{1}{2\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

D'autre part,

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda} + z_\lambda} = 1 - \frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

En égalisant les deux expressions et en simplifiant, on obtient :

$$\lambda^2 z_\lambda - \frac{1}{2} = -1 + o(1).$$

Donc, $z_\lambda \sim -\frac{1}{2\lambda^2}$. Finalement,

$$x_\lambda = 1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

2 Exercice – Un équivalent de $\sum_{k=1}^n k^p Q^k$

- (a) Soit $x > 1$. Pour tout $t \in [1, x]$, on a $t^p e^t \leq x^p e^t$. Par croissance de l'intégrale, en intégrant entre 1 et x , on a

$$0 \leq I_p(x) = \int_1^x t^p e^t dt \leq x^p \int_1^x e^t dt = x^p (e^x - 1).$$

Le membre de droite est un $O(x^p e^x)$, donc $I_p(x) = O(x^p e^x)$.

- (b) Soit $x \geq 2$.

- Pour tout $t \in [1, x/2]$, on a $t^p e^t \leq e^t$, car $t^p \leq 1$.
En intégrant entre 1 et $x/2$: $\int_1^{x/2} t^p e^t dt \leq \int_1^{x/2} e^t dt = e^{x/2} - 1 \leq e^{x/2}$.
- Pour tout $t \in [x/2, x]$, on a $t^p e^t \leq \left(\frac{x}{2}\right)^p e^t$.
En intégrant, $\int_{x/2}^x t^p e^t dt \leq \left(\frac{x}{2}\right)^p (e^x - e^{x/2}) \leq \left(\frac{x}{2}\right)^p e^x$.

On somme les inégalités ; par relation de Chasles, on obtient $I_p(x) \leq e^{x/2} + \left(\frac{x}{2}\right)^p e^x$. Les deux termes sont des $O(x^p e^x)$: c'est clair pour le deuxième et vient de ce que $x^{-p} = O(e^{x/2})$ par croissance comparée, pour le premier.
On a donc encore $I_p(x) = O(x^p e^x)$.

(c) Par intégration par parties, on a

$$\int_1^x t^p e^t dt = [t^p e^t]_1^x - \int_1^x p t^{p-1} e^t dt.$$

Donc, $I_p(x) = x^p e^x - p I_{p-1}(x) - e$.

(d) Dans la relation précédente, $I_{p-1}(x) = O(x^{p-1} e^x) = o(x^p e^x)$. De plus, $x^p e^x \rightarrow +\infty$, quand $x \rightarrow +\infty$ (par croissance comparée si $p < 0$). Donc, e est aussi un $o(x^p e^x)$. Ainsi,

$$I_p(x) \sim x^p e^x.$$

2. Comme $Q^t = e^{t \ln Q}$, il est naturel de faire le changement de variable $u = t \ln Q$. On obtient :

$$I_{p,Q}(x) = \int_{\ln Q}^{x \ln Q} \frac{u^p}{(\ln Q)^p} e^u \frac{du}{\ln Q} = \frac{I_p(x \ln Q)}{(\ln Q)^{p+1}} + O(1),$$

où le $O(1)$ tient compte de la partie de l'intégrale (constante) entre 1 et $\ln Q$.

Avec la question précédente, $I_{p,Q}(x) \sim \frac{x^p e^{x \ln Q}}{\ln Q} = \frac{1}{\ln Q} x^p Q^x$.

3. (a) Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $p \geq 0$, on a $k^p Q^k \leq \int_k^{k+1} t^p Q^t dt$, car $Q > 1$. En sommant de 1 à $n-1$,

$$0 \leq S_{n,p,Q} - n^p Q^n \leq \int_1^n t^p Q^t dt = I_{p,Q}(n).$$

L'équivalent de la question précédente donne $S_{n,p,Q} = O(n^p Q^n)$.

Si $p \leq 0$, on remarque que $k^p Q^k \leq t^p Q^{t+1}$ si $t \in [k-1, k]$, donc

$$k^p Q^k \leq Q \int_{k-1}^k t^p Q^t dt.$$

On somme pour k allant de 2 à n :

$$0 \leq S_{n,p,Q} - Q \leq Q \int_1^n t^p Q^t dt = Q I_{p,Q}(n).$$

De nouveau, on conclut que $S_{n,p,Q} = O(n^p Q^n)$.

(b) On suit l'indication.

$$\begin{aligned}
S_{n,p,Q} &= \frac{1}{Q-1} \sum_{k=1}^n k^p (Q^{k+1} - Q^k) \\
&= \frac{1}{Q-1} \left(\sum_{\ell=2}^{n+1} (\ell-1)^p Q^\ell - \sum_{k=1}^n k^p Q^k \right) \\
&= \frac{1}{Q-1} \left(\sum_{k=1}^n ((k-1)^p - k^p) Q^k + n^p Q^{n+1} \right)
\end{aligned}$$

(c) Quand $x \rightarrow +\infty$, on a

$$x^p - (x-1)^p = x^p (1 - (1 - 1/x)^p) \sim px^{p-1} = O(x^{p-1}).$$

Donc, il existe $A > 0$ tel que, pour k assez grand, $|k^p - (k-1)^p| \leq Ak^{p-1}$. Comme le membre de droite n'est jamais nul, on peut si besoin augmenter la valeur de A pour que l'inégalité soit valable pour tout $k \geq 1$ (il y a un nombre fini de conditions supplémentaires, toutes remplies pour A assez grand).

(d) On a donc

$$S_{n,p,Q} = \frac{Q}{Q-1} n^p Q^n - T_{n,p,Q},$$

où $T_{n,p,Q} = \sum_{k=1}^n (k^p - (k-1)^p) Q^k$. Par inégalité triangulaire et la question précédente, $|T_{n,p,Q}| \leq \sum_{k=1}^n A \sum_{k=1}^n k^{p-1} Q^k = O(n^{p-1} Q^n)$, par la question (a). Ainsi, $T_{n,p,Q} = o(n^p Q^n)$. Donc,

$$S_{n,p,Q} \sim \frac{Q}{Q-1} n^p Q^n.$$

3 Problème – Sur la convergence au sens d'Abel

3.1 Lemme de Toeplitz

1. Comme la suite (a_n) converge, elle est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $|p_n(t)a_n| \leq Mp_n(t)$. Comme la série $\sum_{n \geq 1} Mp_n(t)$ converge, la série $\sum_{n \geq 1} |p_n(t)a_n|$ converge, par comparaison de séries à termes positifs.

D'où la convergence absolue de $\sum_{n \geq 1} p_n(t)a_n$.

2. On commence par écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)a_n - \ell = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)(a_n - \ell) - \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)\right)\ell.$$

Il suffit en effet d'écrire l'égalité sur les sommes partielles et de prendre la limite, tout étant convergent.

$$\text{On a de plus } \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)(a_n - \ell) = \sum_{n=1}^N p_n(t)(a_n - \ell) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n(t)(a_n - \ell).$$

On rassemble ces égalités. Par inégalité triangulaire (les p_n sont positifs), on a :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)a_n - \ell \right| \leq \sum_{n=1}^N p_n(t)|a_n - \ell| + \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n(t)|a_n - \ell| + \left| 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) \right| |\ell|.$$

On conclut en disant que $p_n(t) \leq \max_{k \in \llbracket 1, N \rrbracket} (p_k(t))$, si $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

3. On fixe $\varepsilon > 0$. On peut trouver un entier $N \geq 1$ tel que, si $n > N$, $|a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{6}$. On

$$\text{note } S = \sum_{n=1}^N |a_n - \ell|.$$

Ensuite, pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on peut trouver $\delta_k \in]0, 1[$ tel que, si $t \in [1 - \delta_k, 1[$, alors $p_k(t) \leq \frac{\varepsilon}{3(S+1)}$ (car les $p_k(t)$ tendent vers 0 en 1.) Enfin, on peut trouver un tel

$\delta_0 \in]0, 1[$ tel que $\left| 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3(|\ell| + 1)}$ si $t \in]1 - \delta_0, 1[$ (car $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) \rightarrow 1$, quand t tend vers 1).

Posons $\delta = \min(\delta_0, \dots, \delta_N)$. Par la question précédente, si $t \in [1 - \delta, 1[$, on a :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)a_n - \ell \right| \leq \frac{\varepsilon}{3(S+1)} \times S + \frac{\varepsilon}{6} \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n(t) + \frac{\varepsilon}{3(|\ell| + 1)} |\ell|.$$

Quitte à diminuer encore δ , on peut de plus supposer que, si $t \in [1 - \delta, 1[$, $\sum_{n=N+1}^{\infty} p_n(t) \leq$

$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) \leq 2$ (car cette somme tend vers 1 quand $t \rightarrow 1$). On obtient alors que si

$$t \in [1 - \delta, 1[, \left| \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)a_n - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

Donc, $\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)a_n = \ell$.

3.2 Théorème d'Abel

4. (a) Comme la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente, $u_n = O(1)$ et donc $|u_n t^n| = O(t^n)$. Par comparaison avec une série géométrique de raison $t \in [0, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n t^n$ converge absolument.

(b) On calcule, en convenant que $U_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n t^n &= \sum_{n=1}^N (U_n - U_{n-1}) t^n \\ &= \sum_{n=1}^N U_n t^n - \sum_{n=0}^{N-1} U_n t^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} (t^n - t^{n+1}) U_n + U_N t^N. \end{aligned}$$

(c) Pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in [0, 1[$, on note $p_n(t) = t^n - t^{n+1}$. On remarque :

- Les p_n sont à valeurs positives ;
- Pour tout $n \geq 1$, $p_n(t) = t^n - t^{n+1} \rightarrow 1 - 1 = 0$, quand $t \rightarrow 1$;
- Pour tout $t \in [0, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} p_n(t)$ est convergente de somme t (par télescopage)

et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) \rightarrow 1$, quand $t \rightarrow 1$.

Les hypothèses du lemme de Toeplitz sont donc satisfaites ; comme $U_n \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ par

définition, on en déduit que $\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} (t^n - t^{n+1}) U_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Par ailleurs, en faisant

tendre N vers l'infini dans la question précédente, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} (t^n - t^{n+1}) U_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n t^n$.

D'où $\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

5. Une application.

(a) La fonction f_N est dérivable et on a, pour tout $t \in [0, 1[$:

$$f'_N(t) = e^{i\theta} \sum_{n=0}^{N-1} (te^{i\theta})^n = e^{i\theta} \frac{1 - (e^{i\theta}t)^N}{1 - e^{i\theta}t} = -\frac{1 - (e^{i\theta}t)^N}{t - e^{-i\theta}}.$$

Comme $f_N(0)$, on a par le théorème fondamental de l'analyse :

$$f_N(t) = -\int_0^t \frac{1 - (e^{i\theta}u)^N}{u - e^{-i\theta}} du.$$

(b) La suite de fonctions $g_N : u \mapsto \frac{1 - (e^{i\theta}u)^N}{u - e^{-i\theta}}$, définies sur $[0, t]$, converge uniformément vers $g : u \mapsto \frac{1}{u - e^{-i\theta}}$. En effet, on a la majoration $\left| \frac{(e^{i\theta}u)^N}{u - e^{-i\theta}} \right| \leq \frac{t^N}{m}$, où m est le

minimum de $|u - e^{-i\theta}|$ sur $[0, t]$ ($m > 0$ par TBA). Ce majorant tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$, indépendamment de u , d'où la convergence uniforme. On en déduit que

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} - \int_0^t \frac{1 - (e^{i\theta}u)^N}{u - e^{-i\theta}} du = - \int_0^t \frac{1}{u - e^{-i\theta}} du.$$

Pour la deuxième égalité, on doit calculer cette intégrale. Soit $u \in [0, t]$. On a :

$$\frac{1}{u - e^{-i\theta}} = \frac{u - e^{i\theta}}{|u - e^{i\theta}|^2}.$$

On a $u - e^{i\theta} = (u - \cos \theta) - i \sin \theta$ donc $|u - e^{i\theta}|^2 = u^2 - 2u \cos \theta + 1$. D'où,

$$\frac{1}{u - e^{-i\theta}} = \frac{u - \cos \theta}{u^2 - 2u \cos \theta + 1} - i \frac{\sin \theta}{u^2 - 2u \cos \theta + 1}.$$

Une primitive de la partie réelle est $u \mapsto \frac{1}{2} \ln(u^2 - 2u \cos \theta + 1) = \frac{1}{2} \ln |u - e^{-i\theta}|^2 = \ln |u - e^{-i\theta}|$.

La partie imaginaire peut être réécrite $-\frac{\sin \theta}{(u - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2}$, de primitive $u \mapsto -\text{Arctan} \left(\frac{u - \cos \theta}{\sin \theta} \right)$. On obtient finalement :

$$f(t) = - \left(\ln |t - e^{-i\theta}| - \ln |0 - e^{-i\theta}| - i \text{Arctan} \left(\frac{t - \cos \theta}{\sin \theta} \right) + i \text{Arctan} \left(\frac{-\cos \theta}{\sin \theta} \right) \right).$$

Or, $\frac{-\cos \theta}{\sin \theta} = -\cotan \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$, de sorte que $-\text{Arctan} \left(\frac{-\cos \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{\pi}{2} - \theta$. D'où la formule annoncée.

(c) Par le théorème d'Abel, on sait que $f(t) \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$, quand $t \rightarrow 1$.

Le membre de droite de l'égalité précédente est continu par rapport à $t \in [0, 1]$, on a donc, en passant à la limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln |1 - e^{-i\theta}| + i \text{Arctan} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) + i \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

Par méthode de l'angle moitié, on a $|1 - e^{-i\theta}| = |2i \sin(-\theta/2)| = 2 \sin(\theta/2)$ (car $\theta \in]0, \pi[$).

On peut de plus écrire $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin^2(\theta/2)}{2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)} = \tan(\theta/2)$. Et comme $\theta/2 \in]0, \pi/2[$, $\text{Arctan}(\tan(\theta/2)) = \theta/2$.

On obtient ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln (2 \sin(\theta/2)) + i \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right).$$

3.3 Convergence au sens de Cesàro et au sens d'Abel

6. On constate immédiatement que $U_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}$ vaut 1 si n est impair et 0 si n est pair. Donc, $U_1 + \dots + U_n = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \sim \frac{n}{2}$ et $\frac{U_1 + \dots + U_n}{n} \rightarrow 1/2$.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}$ converge au sens de Cesàro et $\sum_{n \geq 1}^c (-1)^{n-1} = \frac{1}{2}$.

7. Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série à termes positifs, convergente au sens de Cesàro. Comme la suite (U_n) des sommes partielles est croissante, on a, si n est pair, $\frac{U_1 + \dots + U_n}{n} \geq \frac{U_{n/2+1} + \dots + U_n}{n} \geq \frac{n}{2} \times \frac{U_{n/2}}{n} \geq \frac{U_{n/2}}{2}$. Comme le membre de gauche converge, $U_{n/2}$ ne tend pas vers $+\infty$; comme (U_n) est croissante, elle converge. Donc, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge au sens habituel.

8. On suppose que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge au sens de Cesàro.

Alors, $\frac{U_n}{n} = \frac{U_1 + \dots + U_n}{n} - \frac{U_1 + \dots + U_{n-1}}{n-1} \frac{n-1}{n}$. Ceci tend vers $\sum_{n \geq 1}^c u_n - \sum_{n \geq 1}^c u_n \times 1 = 0$ par opérations élémentaires sur les limites. Donc, $U_n = o(n)$.

9. On considère la suite $u_n = \frac{1}{n}$. On sait que $U_n = H_n \sim \ln n = o(n)$. Cependant, $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas au sens de Cesàro : en effet, c'est une série à termes positifs et elle ne converge pas au sens usuel (on utilise la question 7).

10. Théorème de Frobenius.

(a) Par la question 8, $U_n = o(n)$. On a donc aussi $u_n = U_n - U_{n-1} = o(n)$. De plus, on peut trouver $A > 0$ tel que $|U_n| \leq An$ pour tout $n \geq 1$ (on peut même prendre A quelconque, avec n assez grand, mais on n'en aura pas besoin). Donc, $|\sum_{k=1}^N U_k| \leq A \sum_{k=1}^N k = O(N^2)$. Ainsi, $u_n t^n$, $U_n t^n$ et $\sum_{k=1}^n t^k$ sont des $O(n^2 t^n)$ donc des $o(u^n)$ si $t < u < 1$. Par comparaison avec une série géométrique, toutes ces séries convergent absolument.

(b) Soit $N \geq 1$. On calcule :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \left(\frac{U_1 + \dots + U_n}{n} \right) (1-t)^2 n t^n \\
&= \sum_{n=1}^N (U_1 + \dots + U_n) (1-t)^2 t^n \\
&= \sum_{n=1}^N (U_1 + \dots + U_n) (t^n - 2t^{n+1} + t^{n+2}) \\
&= \sum_{n=1}^N (U_1 + \dots + U_n) t^n - 2 \sum_{n=2}^{N+1} (U_1 + \dots + U_{n-1}) t^n + \sum_{n=3}^{N+2} (U_1 + \dots + U_{n-2}) t^n \\
&= U_1 t + (U_1 + U_2) t^2 - 2U_1 t^2 + 2(U_1 + \dots + U_N) t^{N+1} \\
&\quad + (U_1 + \dots + U_{N-1}) t^{N+1} + (U_1 + \dots + U_N) t^{N+2} + \sum_{n=3}^N (U_n - U_{n-1}) t^n.
\end{aligned}$$

Quand on prend la limite $N \rightarrow +\infty$, les termes centraux de la forme $(U_1 + \dots + U_N) t^N$ tendent vers 0 (car ce sont les termes de séries convergentes) ; on a donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{U_1 + \dots + U_n}{n} \right) (1-t)^2 n t^n = U_1 t + (U_2 - U_1) t^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} u_n t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n t^n.$$

(c) Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, 1[$, on note $p_n(t) = (1-t)^2 n t^n$. On vérifie que :

- Les p_n sont à valeurs positives ;
- À n fixé, $p_n(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 1$;
- Pour tout $t \in [0, 1[$, $\sum_{n \geq 1} p_n(t)$ est convergente (arguments similaires au précédents).

De plus, $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) = t$ (le plus simple est d'appliquer la formule précédente avec

la suite (u_n) donnée par $u_1 = 1$ et $u_n = 0$ si $n \geq 2$; le facteur $\frac{U_1 + \dots + U_n}{n}$

vaut alors tout le temps 1.) et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) \rightarrow 1$, quand $t \rightarrow 1$.

On peut donc appliquer le lemme de Toeplitz et conclure que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{U_1 + \dots + U_n}{n} \right) p_n(t) \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_1 + \dots + U_n}{n} = \sum_{n \geq 1}^c u_n.$$

Par la formule de la question précédente, cela revient à dire que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge au

sens d'Abel et que $\sum_{n \geq 1}^A u_n = \sum_{n \geq 1}^c u_n$.

3.4 Calculs de sommes de séries divergentes

11. (a) On reconnaît une somme géométrique. Donc,

$$f_N(t) = t \frac{1 - (-t)^N}{1 + t}.$$

On écrit $t = (1 + t) - 1$ et on obtient :

$$f_N(t) = 1 - (-t)^N - \frac{1 - (-t)^N}{1 + t}.$$

- (b) On note $p_N(t) = 1 - (-t)^N$. Les dérivées de p_N se calculent immédiatement et on a facilement que $p_N^{(k)}(t)$ tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$, pour tout $k \geq 1$.

Notons $g : t \mapsto \frac{1}{1+t}$. Par formule de Leibniz, la dérivée k -ème de $t \mapsto \frac{p_N(t)}{1+t} =$

$p_N(t)g(t)$ est donnée par $t \mapsto \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} p_N^{(i)}(t) g^{(k-i)}(t)$. Quand $N \rightarrow +\infty$, seul le terme pour $i = 0$ ne tend pas vers 0. Ainsi,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} f_N^{(k)}(t) = -g^{(k)}(t) = k! \frac{(-1)^{k+1}}{(1+t)^{k+1}},$$

par une récurrence immédiate.

- (c) En dérivant k fois f_N directement (pour $N > k$), on a

$$f_N^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^N (-1)^{n-1} (n-1) \dots (n-k+1) t^{n-k} = k! \sum_{n=k}^N (-1)^{n-1} \binom{n}{k} t^{n-k}.$$

D'après la question précédente, on peut donc passer à la limite $N \rightarrow +\infty$:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{n}{k} t^{n-k} = \frac{(-1)^{k+1}}{(1+t)^{k+1}}.$$

On peut encore écrire cette relation comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{n}{k} t^n = \frac{(-1)^{k+1} t^k}{(1+t)^{k+1}},$$

en convenant que $\binom{n}{k} = 0$ si $n < k$.

Le membre de droite tend vers $\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}$. Par définition, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \binom{n}{k}$

converge donc au sens d'Abel et $\sum_{n \geq 1}^A (-1)^{n-1} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}$.

12. (a) La série définissant $\eta(s)$ est alternée et la valeur absolue de son terme général tend vers 0 en décroissant si $s > 0$. Par le critère des séries alternées, cette série converge au sens usuel, donc au sens d'Abel par la partie 3.2.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$. La famille des P_k est une base de $\mathbb{R}[X]$ car P_k est de degré k pour tout k . En particulier, si $j \in \mathbb{N}$, on peut trouver des réels a_0, \dots, a_j tels que $X^j = \sum_{k=0}^j a_k P_k$. En évaluant en $n \geq 1$, on a $n^j = \sum_{k=0}^j a_k \binom{n}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^j$ est une combinaison linéaire des séries $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \binom{n}{k}$, pour $k \in \llbracket 0, j \rrbracket$. Comme toutes ces séries sont convergentes au sens d'Abel (y compris pour $k = 0$, Q6 montre la convergence au sens de Cesàro et elle implique la convergence au sens d'Abel) et que la convergence au sens d'Abel est stable par combinaisons linéaires (immédiat), la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^j$ est convergente au sens d'Abel pour tout $j \geq 0$. Cela revient à dire que $\eta(s)$ est bien défini si s est un entier négatif.

- (c) • $\eta(0) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{A}} (-1)^{n-1} = 1/2$ par la question 6.
- $\eta(-1) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{A}} (-1)^{n-1} n = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{A}} (-1)^{n-1} \binom{n}{1} = \frac{1}{4}$ par Q11.
- $\eta(-2) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{A}} (-1)^{n-1} n^2 = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{A}} (-1)^{n-1} \left(2 \binom{n}{2} + \binom{n}{1} \right) = 2 \times \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = 0$, par Q11.

13. (a) Pour $s > 1$, on a

$$\zeta(s) - \eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - (-1)^{n-1}) \frac{1}{n^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k)^s} = 2^{1-s} \zeta(s).$$

D'où $\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}$.

(b) Avec Q12, on obtient :

- $\zeta(0) = \frac{1/2}{1-2} = -\frac{1}{2}$;
- $\zeta(-1) = \frac{1/4}{1-2^2} = -1/12$;
- $\zeta(-2) = 0$.