$\alpha_i \in \mathbb{K}$.

On veut calculer $\det A$, où

$a_{i,j} = 1 + \alpha_j^{\,i}$ (c'est A^T dans l'énoncé de l'exo)

On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

et $C_j = \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \alpha_j^2 \\ \vdots \\ \alpha_j^n \end{pmatrix}$, pour tt j.

Par déf$^{\text{o}}$, $\det A = \det(U + C_1, U + C_2, \dots, U + C_n)$

Par n-linéarité, on peut développer en une somme de 2^n termes de la forme $\det(B_1, \dots, B_n)$ où B_i vaut C_i ou U.

Si deux B_j valent U, le dét est nul (caractère alterné).

Donc,

$$\det A = \det(C_1, \dots, C_n) + \sum_{j=1}^{n} \det(C_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j^{\text{o}} \text{ position}}}{U}, \dots, C_n)$$

- Pour $\det(C_1, \dots, C_n)$, on a presque un Vandermonde :

$$\det(C_1, \dots, C_n) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1 \cdots \alpha_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1 \cdots \alpha_n \, V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

- Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On veut calculer

$$\underset{\substack{\uparrow \\ j}}{\det(C_1, \dots, U, \dots, C_n)} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & & | & & \vdots \\ \alpha_1^n & \cdots & 1 & \text{---} & \alpha_n^n \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ j \end{array}$$

On remarque que c'est encore "presque" un Vandermonde, avec un "1" au lieu de α_j.

Notons $p_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \alpha_k$.

Alors $\det(C_1, \dots, U, \dots, C_n)$

$$= p_j \, V(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, 1, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$$

On peut expliciter un peu.

Ce Vandermonde vaut

$$\prod_{\substack{1\leq k<\ell\leq n\\ k\neq j\\ \ell\neq j}} (\alpha_\ell-\alpha_k) \times (1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_{j-1}) \times (\alpha_{j+1}-1)\cdots(\alpha_n-1)$$

$$= (-1)^{j-1} \prod_{\substack{1\leq k<\ell\leq n\\ k\neq j\\ \ell\neq j}} (\alpha_\ell-\alpha_k) \cdot \prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} (\alpha_k-1)$$

Finalement,

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \prod_{1\leq k<\ell\leq n} (\alpha_\ell-\alpha_k)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j-1} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} \alpha_k(\alpha_k-1) \prod_{\substack{1\leq k<\ell\leq n\\ k\neq j\\ \ell\neq j}} (\alpha_\ell-\alpha_k) \right)$$

Ex : pour $n=2$

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & 1+\alpha_2 \\ 1+\alpha_1^2 & 1+\alpha_2^2 \end{pmatrix}$$

La formule donne $\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) + \alpha_2(\alpha_2-1) - \alpha_1(\alpha_1-1)$

et un calcul direct $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2^2)-(1+\alpha_1^2)(1+\alpha_2)$

c'est OK. $= \alpha_2^2-\alpha_1^2 + \alpha_1-\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_2\alpha_1^2$.

On peut qd même chercher à simplifier la formule. Comme det $A = 0$ si deux α_j sont égaux, on doit pouvoir factoriser par $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

(pas si dur)

À méditer (ou pas)

Rmq : • Ça doit être la même formule que celle obtenue par D. L. au tableau.

• Je n'ai pas compris si L. C. disait avoir mieux.

Suite et fin

On fixe $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$; et pour $x \in \mathbb{K}$, on note

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1+\alpha_1 & \cdots & 1+x \\ \vdots & & \vdots \\ 1+\alpha_1^n & \cdots & 1+x^n \end{vmatrix}$$

On cherche à montrer que :

$$D_n(x) = \left[2\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}\, x - (\alpha_1 - 1) \cdots (\alpha_{n-1} - 1)(x-1) \right] \times V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x).$$

(V déterminant de Vandermonde).

On suppose dans un premier temps que $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont 2 à 2 $\neq$ et $\neq$ de 1 et de 0

- En développant selon la dernière colonne, on constate que $D_n(x)$ est polynomial en x, de degré au plus n
- Le membre $R_n(x) =$ $\left[2\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}\, x - (\alpha_1 - 1) \cdots (\alpha_{n-1} - 1)(x-1) \right] V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$ est aussi polynomial en x, de degré au plus n

En effet, $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$ est de degré $n-1$ en x.

- Si on montre que l'égalité est vraie en $n+1$ points, on aura montré qu'elle est tt le temps valide.

* Pour x égal à l'un des α_k ($k \in [\![1, n-1]\!]$), les deux membres sont nuls.

* Pour $x = 0$, notons
$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \vdots \\ \alpha_k^n \end{pmatrix}.$$

On a $D_n(0) = \det(U + C_1, \dots, U + C_{n-1}, U)$

$$D_n(0) = \det(C_1, \dots, C_{n-1}, U) \quad (\text{par } n\text{-lin + caractère alterné})$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^n & \cdots & \alpha_{n-1}^n & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$$

Donc, $D_n(0) = \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$
$\times (1-\alpha_1) \cdots (1-\alpha_{n-1})$.

Et $R_n(0) = (\alpha_1 - 1) \cdots (\alpha_n - 1) V(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, 0)$

$= (\alpha_1 - 1) \cdots (\alpha_n - 1) V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (0 - \alpha_k)$

On a bien $D_n(0) = R_n(0)$

* Pour $x = 1$,

$D_n(1) = \det(U + C_1, \ldots, U + C_{n-1}, 2U)$

$= 2 \det(C_1, \ldots, C_{n-1}, U)$

$D_n(1) = 2 V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1) \times \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}$

Et donc $D_n(1) = R_n(1)$

Ainsi, D_n et R_n sont égaux en $n+1$ points ; donc

$\forall x \in \mathbb{K}, D_n(x) = R_n(x)$.

On a montré que

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ sont 2 à 2 $\neq$ et $\neq$ de 0 et 1, alors

$\forall x \in \mathbb{K}$,

$$D_n(x) = \left[2x \prod_{k=1}^{n-1} \alpha_k - (x-1) \prod_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - 1) \right] \times V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$$

- La formule est encore valable si deux α_i sont égaux (les deux membres sont nuls)
- Par des arguments généraux d'identité polynomiale, elle est valable sans cond°.

(il faudrait détailler)

Bilan : $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$\left| 1 + \alpha_i^j \right|_{1 \leq i, j \leq n} = \left[2 \prod_{k=1}^{n} \alpha_k - \prod_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1) \right] V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$