DM 20B - Décomposition en éléments simples

On désigne par $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

L'objectif du problème est de donner une démonstration du théorème de décomposition en éléments simples pour les fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$.

1 Existence

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

1. Montrer qu'on peut trouver P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, des irréductibles unitaires $Q_1, \dots, Q_r$ de $\mathbb{K}[X]$, des entiers $n_1, \dots, n_r \geq 1$ tels que : $F = \dfrac{P}{Q}$ et $Q = \prod_{i=1}^{r} Q_i^{n_i}$.

2. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note $R_i = \prod_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \neq i}} Q_j^{n_j}$.

   Montrer qu'il existe $U_1, \dots, U_r$ dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $\sum_{i=1}^{r} U_i R_i = 1$.

3. En déduire que F peut s'écrire $F = \sum_{i=1}^{r} \dfrac{P_i}{Q_i^{n_i}}$, où les P_i sont dans $\mathbb{K}[X]$.

4. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $\deg B \geq 1$.

   Montrer qu'on peut trouver $A_0, \dots, A_\ell$ dans $\mathbb{K}_{\deg B - 1}[X]$ tels que $A = \sum_{i=0}^{\ell} A_i B^i$.

5. Conclure quant à l'existence d'une décomposition en éléments simples de F.

2 Unicité

6. On note $\mathbb{K}_-(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles de degré strictement négatif.
   Montrer que $\mathbb{K}_-(X)$ est un ssev de $\mathbb{K}(X)$ et qu'il est en somme directe avec $\mathbb{K}[X]$.

7. Pour tout irréductible unitaire Q de $\mathbb{K}[X]$, on note

$$\mathbb{K}_Q(X) = \left\{ \frac{P}{Q^k}, (P, k) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{N}^* \right\}.$$

   Montrer que les $\mathbb{K}_Q(X)$ sont des ssev de $\mathbb{K}_-(X)$ et qu'ils sont en somme directe.

8. Soit Q un irréductible unitaire de $\mathbb{K}[X]$. Pour tout entier $k \geq 1$ et tout entier $i \in [\![0, \deg Q - 1]\!]$, on note $F_{i,k} = \dfrac{X^i}{Q^k}$. Montrer que la famille des $F_{i,k}$ est une base de $\mathbb{K}_Q(X)$.

9. Conclure quant à l'unicité d'une décomposition en éléments simples de F.