# DM 20 - Nombres de Stirling

## 1 Nombre de surjections, par la formule du crible

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On cherche à déterminer le nombre $S(n,p)$ de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on note $A_k \subset \mathscr{F}\Big([\![1,n]\!],[\![1,p]\!]\Big)$ l'ensemble des fonctions $f$ pour lesquelles $k$ n'a pas d'antécédent.

1. Soient $i_1, \dots, i_k$ des indices deux à deux distincts dans $[\![1,p]\!]$.
   Interpréter l'ensemble $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ et en déduire son cardinal.

2. On note $\mathscr{S}(n,p)$ l'ensemble des surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.
   Exprimer $\mathscr{S}(n,p)$ en fonction des $A_k$.

3. En utilisant la formule du crible, en déduire que $S(n,p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

## 2 Nombres de Stirling

On garde les notations de l'exercice précédent.

1. **Nombres de Stirling de deuxième espèce.** Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(n,k)$ l'ensemble des partitions de $[\![1,n]\!]$ en $k$ parties et $\left\{ {n \atop k} \right\}$ le nombre de telles partitions de $[\![1,n]\!]$.

   (a) Montrer que pour tous $n \geq 2$ et $k \in [\![1,n]\!]$, $\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$.

   Pour tout réel $x$ et tout entier $n$, on note $x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1)$.

   (b) En déduire que, pour tout $x$ réel et tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $x^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$.

   (c) Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, soit $f \in \mathscr{S}(n,k)$. On note $P_f$ la partition de $[\![1,n]\!]$, associée à la relation d'équivalence $\mathscr{R}_f$ sur $[\![1,n]\!]$ :

   $$\forall i, j \in [\![1,n]\!], i \mathscr{R}_f j \iff f(i) = f(j).$$

   Montrer que $P_f \in \mathscr{P}(n,k)$.

   (d) On considère $\Phi : \mathscr{S}(n,k) \to \mathscr{P}(n,k)$, définie par $\Phi(f) = P_f$. Montrer que $\Phi$ est surjective et que tout $P \in \mathscr{P}(n,k)$ a exactement $k!$ antécédents par $\Phi$.

   (e) En déduire que $\left\{ {n \atop k} \right\} = \dfrac{1}{k!} S(n,k)$.

   (f) Écrire la formule obtenue en $(b)$ pour $x = p$ un entier naturel en termes des $S(n,k)$.
   L'interpréter combinatoirement.

2. **Nombres de Stirling de première espèce.**

Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid \forall i \neq j \in [\![1, n]\!], x_i \neq x_j\right\}$. Pour alléger les notations, on identifie deux indices congrus modulo $n$. Par exemple, $x_{n+1}$ désigne $x_1$ et $x_{2n}$ désigne $x_n$. On introduit sur $E$ la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par

$$(x_1, \dots, x_n) \mathscr{R} (y_1, \dots, y_n) \iff \exists \ell \in [\![1, n]\!] : \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = y_{i+\ell}.$$

Ainsi, le triplet $(1, 2, 3) \in E$ est en relation avec $(2, 3, 1)$ et $(3, 1, 2)$, mais pas avec $(1, 3, 2)$.

- On appelle $n$-cycle une classe d'équivalence pour $\mathscr{R}$ et on note $[x_1, \dots, x_n]$ le $n$-cycle égal à la classe d'équivalence de $(x_1, \dots, x_n)$.
- Le support d'un $n$-cycle $[x_1, \dots, x_n]$ est l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$. Il ne dépend pas de l'écriture choisie pour le $n$-cycle. On note $\mathrm{Supp}(C)$ le support d'un cycle $C$.
- Une partition en cycles de $[\![1, n]\!]$ est un ensemble de cycles $\mathscr{C} = \left\{C_1, \dots, C_k\right\}$ tel que $\mathscr{P} = \left\{\mathrm{Supp}(C_1), \dots, \mathrm{Supp}(C_k)\right\}$ est une partition de $[\![1, n]\!]$. On note $\mathscr{P} = \mathrm{Supp}(\mathscr{C})$.

On note $\mathscr{C}(n, k)$ l'ensemble des partitions en cycles de $[\![1, n]\!]$, dont le support est de cardinal $k$. On note $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = |\mathscr{C}(n, k)|$.

(a) Soient $x_1, \dots, x_k$ des entiers naturels deux à deux distincts. Combien y a-t-il de cycles de support $\{x_1, \dots, x_k\}$ ?

(b) Soit $\mathscr{P} = \left\{P_1, \dots, P_k\right\}$ une partition de $[\![1, n]\!]$ en $k$ parties. On note $n_i = |P_i|$. Combien y a-t-il de partitions en cycles de support $\mathscr{P}$ ?

(c) Illustrer graphiquement toutes les partitions et partitions en cycles de $[\![1, 3]\!]$.

(d) En considérant $\Psi : \mathscr{C}(n, k) \to \mathscr{P}(n, k)$, définie par $\Psi(\mathscr{C}) = \mathrm{Supp}(\mathscr{C})$, montrer que pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$. Montrer que l'égalité a lieu ssi $k \geq n - 1$.

(e) Montrer que pour tous $n \geq 2$ et $k \in [\![1, n]\!]$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$.

Pour tout réel $x$ et tout entier $n$, on note $x^{\overline{n}} = x(x+1) \dots (x+n-1)$. On admet qu'on pourrait montrer, comme en 1.b), que pour tout réel $x$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $x^{\overline{n}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$.

(f) Quelle formule obtient pour $x = 1$ ? L'interpréter combinatoirement.

(g) Après avoir établi une relation entre $x^{\underline{n}}$ et $(-x)^{\overline{n}}$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k.$$

(h) En déduire que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ : $\sum\limits_{k=m}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{k-m} = \delta_{m,n}$, où $\delta_{m,n} = 1$ si $m = n$ et 0 sinon.