Fractions rationnelles

1 Décomposition en éléments simples

EXERCICE 1. ●○○ *Calculs explicites de DES*
Décomposer en éléments simples :

1. $\dfrac{X^3}{X^2-3X+2}$ dans $\mathbb{R}(X)$;
2. $\dfrac{X^3+X^2+1}{X^3+X^2+X}$ dans $\mathbb{C}(X)$;
3. $\dfrac{X-1}{X^3-3X-2}$ dans $\mathbb{R}(X)$;
4. $\dfrac{1}{(X-1)^2(X+1)^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$;
5. $\dfrac{X}{X^3-1}$ dans $\mathbb{R}(X)$;
6. $\dfrac{1}{(X^2+1)(X^2+X+2)}$ dans $\mathbb{R}(X)$;
7. $\dfrac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}$ dans $\mathbb{R}(X)$;
8. $\dfrac{4}{(X^2+1)^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

EXERCICE 2. ●○○ *Calcul d'une somme par DES*
Simplifier, pour $n\in\mathbb{N}^*$, l'expression $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+3}{k^3+3k^2+2k}$.
En déduire la limite de (u_n).

EXERCICE 3. ♣ – ●◐○ *Primitives de fractions rationnelles*
Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+2}$;
2. $x\mapsto\dfrac{1}{1-x^2}$;
3. $x\mapsto\dfrac{x}{x^4-16}$;
4. $x\mapsto\dfrac{1}{x(1+x^2)^2}$.

EXERCICE 4. ♣/♢ – ●●○ *Inverse des polynômes de Tchebychev*
Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{T_n}$, où T_n est le n-ème polynôme de Tchebychev.

EXERCICE 5. ♣ – ●●○ *Identité avec sommes et racines*
Soit $n\geq 2$, soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé, à racines simples $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Soit $r\in[\![0,n-1]\!]$

1. Écrire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^r}{P}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k^r}{P'(\alpha_k)}$.
3. En procédant de façon analogue, déterminer les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_kP'(\alpha_k)}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{P''(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)}$.

EXERCICE 6. ●●○ *Inverse de P^2*
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire, à racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P^2}$.

EXERCICE 7. ♣/♢ – ●●◐ *DES de $\dfrac{P'}{P}$ et théorème de Gauss-Lucas*
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé non constant.

1. Expliciter en fonction des racines de P et de leur multiplicité la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{P'}{P}$.
2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que P est scindé à racines simples. Montrer qu'il en est de même de $P' + \alpha P$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que les racines de P' sont des barycentres des racines de P.

2 Autres exercices

EXERCICE 8. ◐○○ *Dérivée d'une fraction rationnelle*
Si F est une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$, représentée par le quotient $\dfrac{A}{B}$, on définit la fraction dérivée de F par $F' = \dfrac{A'B - AB'}{B^2}$.

1. Montrer que la définition de F' ne dépend pas du représentant $\dfrac{A}{B}$ choisi pour F.
2. Déterminer le degré de F' en fonction de celui de F.

EXERCICE 9. ●○○ *Équations dans $\mathbb{C}(X)$*

1. Montrer qu'il n'existe pas $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F^2 = \dfrac{1}{X}$.
2. Déterminer les $R \in \mathbb{C}(X)$ telles que $R^2 = \dfrac{X^2}{(X+1)(X+2)}$.
3. Montrer qu'il n'existe pas $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F' = \dfrac{1}{X}$.
4. Déterminer les $R \in \mathbb{C}(X)$ telles que $R' = \dfrac{1}{X^2+1}$.

EXERCICE 10. ♣/♢ – ●◐○ *Ensemble des valeurs d'une fonction rationnelle*
Que peut valoir l'ensemble des valeurs prises par une fonction rationnelle, associée à une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$?

EXERCICE 11. ♣ – ●●○ *Coefficients de Taylor d'une fraction rationnelle*
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle dont 0 n'est pas un pôle. Montrer que la suite $\left(\dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire (non triviale) à coefficients constants

EXERCICE 12. ♣ – ●●○ *Minoration de la valeur d'un polynôme en un entier*
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$. On note $Q = X(X-1)\cdots(X-n)$.

1. Montrer $\dfrac{P}{Q} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{n!}\binom{n}{k} P(k) \frac{1}{X-k}$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} P(k) = n!$.
3. En déduire $\displaystyle\max_{k\in[\![0,n]\!]} \left\{|P(k)|\right\} \geq \frac{n!}{2^n}$.
4. Ce résultat a été obtenu en plus grande généralité dans la feuille de TD précédente. Comment généraliser la méthode de cet exercice ?

EXERCICE 13. ♣ – ●●◐ *Inégalités de Laguerre*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. Montrer les assertions suivantes.

1. Si P est scindé, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P^{(k-1)}(x)\, P^{(k+1)}(x) \leq P^{(k)}(x)^2$.
2. P est scindé à racines simples ssi $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P^{(k-1)}(x)\, P^{(k+1)}(x) < P^{(k)}(x)^2$.

Indications

Exercice 4. Les coefficients dans la décomposition en éléments simples peuvent êter calculés avec T_n'.

Exercice 7. Pour 2., étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{P'(x) + \alpha P(x)}{P(x)}$. Pour 3., si β est une racine de P', alors $\dfrac{P'}{P}$ évalué en β vaut 0.

Exercice 10. Si P et Q sont premiers entre eux, étudier l'équation $\dfrac{P(z)}{Q(z)} = \alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$. Bien clarifier si on raisonne par déductions ou par équivalence.