23 - Fractions rationnelles

Jeremy Daniel

On désigne par $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

1 Généralités

1.1 Construction de $\mathbb{K}(X)$ - HP

Définition 1.1 (Relation d'équivalence sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] - \{0\})$)
Soient (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) dans $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] - \{0\})$. Ils sont équivalents si $P_1Q_2 = P_2Q_1$.

Remarque 1.2
Ceci définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] - \{0\})$.

Notation 1.3
On note $\dfrac{P}{Q}$ la classe d'équivalence du couple $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] - \{0\})$.
Une telle classe est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Notation 1.4
On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.5 (Opérations sur $\mathbb{K}(X)$)
On définit les opérations suivantes dans $\mathbb{K}(X)$:
- Somme : $\dfrac{P_1}{Q_1} + \dfrac{P_2}{Q_2} = \dfrac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}$;
- Produit : $\dfrac{P_1}{Q_1} \times \dfrac{P_2}{Q_2} = \dfrac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$
- Produit externe : si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\dfrac{P}{Q} = \dfrac{\lambda P}{Q}$.

Théorème 1.6 ($\mathbb{K}(X)$ est un corps.)
Muni des opérations + et $\times$, $\mathbb{K}(X)$ est un corps.

Remarque 1.7
L'application $\iota : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}(X), P \mapsto \dfrac{P}{1}$ est un morphisme d'anneaux injectif.

1.2 Forme irréductible, degré

DÉFINITION 1.8 (Forme irréductible)
Une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ est écrite sous forme irréductible si P et Q sont premiers entre eux. Si de plus Q est unitaire, on parle de forme irréductible unitaire.

PROPOSITION 1.9 (Unicité de l'écriture sous forme irréductible unitaire)
Toute fraction rationnelle F admet une unique écriture sous forme irréductible unitaire.

DÉFINITION 1.10 (Degré d'une fraction rationnelle)
Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On définit son degré $\deg F$, comme $\deg P - \deg Q \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

PROPOSITION 1.11 (Degré d'une somme, d'un produit)
Soient $F_1, F_2 \in \mathbb{K}(X)$.

- $\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg F_1, \deg F_2)$, *avec égalité si* $\deg F_1 \neq \deg F_2$ *;*
- $\deg(F_1 \times F_2) = \deg F_1 + \deg F_2$.

REMARQUE 1.12
Si $P \in \mathbb{K}(X)$, son degré en tant que polynôme est égal à son degré en tant que fraction rationnelle.

ATTENTION !
Les fractions rationnelles de degré positif ne sont pas nécessairement des polynômes. Par exemple, $F = \dfrac{X^2}{X-1}$ est de degré 1.

1.3 Racines et pôles

DÉFINITION 1.13 (Racines et pôles)
Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, écrite sous forme irréductible. Les racines – ou zéros – de F sont les racines de P ; les pôles de F sont les racines de Q.
La multiplicité d'une racine est sa multiplicité comme racine de P ; la multiplicité d'un pôle est sa multiplicité comme racine de Q.

REMARQUE 1.14
Comme dans l'écriture précédente P et Q sont premiers entre eux, les ensembles des racines et des pôles de F sont disjoints.

DÉFINITION 1.15 (Fonction rationnelle associée)
Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, dont on note

$\mathcal{P}$ l'ensemble de ses pôles. La fonction rationnelle associée à F est

$$\widetilde{F} : \begin{cases} \mathbb{K} - \mathcal{P} & \to \mathbb{K} \\ x & \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}. \end{cases}$$

2 Décomposition en éléments simples

2.1 Théorie générale

Théorème 2.1 (Partie entière)
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction rationnelle $F_0 \in \mathbb{K}(X)$ tels que

$$F = E + F_0 \text{ avec } \deg F_0 < 0.$$

On appelle E la partie entière de F.

Remarque 2.2
Si $\deg F < 0$, sa partie entière est nulle. Si $\deg F = 0$, sa partie entière est le quotient des coefficients dominant du numérateur et du dénominateur.

Théorème 2.3 (Décomposition en éléments simples)
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe

- $E \in \mathbb{K}[X]$;
- $P_1, \ldots, P_k$ *irréductibles unitaires de* $\mathbb{K}[X]$;
- *des entiers* $n_1, \ldots, n_k \geq 1$;
- $A_{i,j} \in \mathbb{K}[X]$ *avec* $1 \leq i \leq k$ *et* $1 \leq j \leq n_i$, *où* $\deg A_{i,j} < \deg P_i$

tels que $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{i,j}}{P_i^j}$.
Cette écriture est unique à permutation près des irréductibles.

Remarque 2.4
Dans cette décomposition, E est la partie entière de F ; les P_i sont les facteurs irréductibles de Q, si $F = \dfrac{P}{Q}$ est écrite sous forme irréductible.

Exercice 2.5
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé, de racines $r_1, \ldots, r_k$ ayant multiplicités $n_1, \ldots, n_k$. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

2.2 Décompositions en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$

Théorème 2.6 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$)
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Il existe

- $E \in \mathbb{C}[X]$;
- $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$;
- *des entiers* $n_1, \ldots, n_k \geq 1$;
- $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, *où* $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n_i$

tels que $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j}}{(X - z_i)^j}$.

Définition 2.7 (Partie polaire)
Dans l'écriture précédente, la partie polaire associée au pôle z_i de F est la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j}}{(X - z_i)^j}$.

Théorème 2.8 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$)
Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. *Il existe*

- $E \in \mathbb{R}[X]$;
- $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$;
- $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_\ell, \beta_\ell) \in \mathbb{R}^2$, *vérifiant* $\alpha_s^2 - 4\beta_s < 0$;
- *des entiers* $n_1, \ldots, n_k \geq 1$;
- *des entiers* $m_1, \ldots, m_\ell \geq 1$;
- $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, *où* $1 \leq i \leq k$ *et* $1 \leq j \leq n_i$;
- $A_{s,t} \in \mathbb{R}_1[X]$, *où* $1 \leq s \leq \ell, 1 \leq t \leq m_s$

tels que $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j}}{(X - x_i)^j} + \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{t=1}^{m_s} \frac{A_{s,t}}{(X^2 + \alpha_s X + \beta_s)^t}$.

Remarque 2.9
Les termes de la première double somme sont les éléments de première espèce. Il s'agit de la somme des parties polaires associées à chaque x_i. Les termes de la deuxième double somme sont les éléments de deuxième espèce.

2.3 Calculs pratiques

Méthode 2.10
Pour le calcul pratique de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible $F = \dfrac{P}{Q}$:

- Calcul de la partie entière de F ; par division euclidienne de P par Q.
- Décomposition de Q en produit d'irréductibles. Détermination de la forme de la DES. On nomme les coefficients inconnus.
- Exploitation des symétries :
  - Si F est paire ou impaire, on substitue $-X$ à X dans la DES ; l'unicité impose des relations entre coefficients.

- Si F est à coefficients réeles et qu'on cherche sa DES sur $\mathbb{C}(X)$, $F = \overline{F}$ impose de même des relations entre coefficients.

Ensuite, on raisonne sur un irréductible donné P_i. Dans la DES, on a une somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{i,j}}{(P_i)^j}$.
On commence par chercher A_{i,n_i}. Le principe général est de multiplier F par $P_i^{n_i}$ est d'évaluer en une racine de P_i. Les cas les plus importants sont :

- $P_i = X - \alpha$ et $n_i = 1$. On cherche le coefficient a dans le terme $\dfrac{a}{X-\alpha}$ de la DES. Or, $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{(X-\alpha)Q_1}$, où $Q_1(\alpha) \neq 0$. Alors, $a = \dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$. Si le calcul de Q_1 est compliqué, on peut aussi remarquer que $Q_1(\alpha) = Q'(\alpha)$.
- $P_i = X - \alpha$ et $n_i = n \geq 2$. On cherche le coefficient dans le terme $\dfrac{a}{(X-\alpha)^n}$ de la DES. Or, $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{(X-\alpha)^n Q_1}$ où $Q_1(\alpha) \neq 0$. Donc, $a = \dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$. On a aussi $Q_1(\alpha) = \dfrac{Q^{(n)}(\alpha)}{n!}$.
- $P_i = X^2 + \alpha X + \beta$, avec $\alpha^2 - 4\beta < 0$ (DES dans $\mathbb{R}(X)$), $n_i = n$. On cherche le polynôme $aX + b$ dans le terme $\dfrac{aX+b}{(X^2+\alpha X+\beta)^n}$. On écrit $F = \dfrac{P}{(X^2+\alpha X+\beta)^n Q_1}$ où Q_1 est premier avec $X^2+\alpha X+\beta$. On note z une racine complexe de $X^2+\alpha X+\beta$. Alors, $az+b = \dfrac{P(z)}{Q_1(z)}$; ceci donne les valeurs de a et b en résolvant un système linéaire.

Une fois déterminé les coefficients de plus haut degré, on peut en théorie retrancher les termes trouvés et recommencer. Mais c'est rarement le plus rapide. En pratique, on aura presque toujours des exposants ≤ 2 pour les parties polaires et égales à 1 pour les éléments de deuxième espèce. Autres astuces :

- Si $\deg F < 0$, multiplier par $X^{-\deg F}$ et considérer la partie entière (si on est dans $\mathbb{R}(X)$, cela revient à prendre la limite en $\pm\infty$). On obtient une nouvelle relation sur les coefficients.
- Considérer des valeurs particulières et résoudre le système obtenu.

2.4 Application au calcul de primitives

Méthode 2.11
Soit F une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$ ou $\mathbb{C}(X)$. On note f sa fonction rationnelle associée, qu'on considère uniquement sur $\mathbb{R}$. On cherche une primitive de f (sur un intervalle où elle est définie). On commence par écrire la DES de F ; par linéarité, il suffit alors de traiter indépendamment chacun des éléments de la décomposition (la partie polynomiale s'intègre immédiatement).

- Première espèce, $x \mapsto (x-a)^{-n}$, $a \in \mathbb{C}$, $n \neq 1$. Une primitive est $x \mapsto \dfrac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}$.
- Première espèce, $x \mapsto (x-a)^{-1}$, $a \in \mathbb{R}$. Une primitive est $x \mapsto \ln|x-a|$.

– Première espèce $x \mapsto (x-a)^{-1}$, $a \in \mathbb{C}$. On note $a = \alpha + i\beta$. Alors,

$$\frac{1}{x-a} = \frac{x-\bar{a}}{(x-a)(x-\bar{a})} = \frac{1}{2}\frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + i\frac{\frac{1}{\beta}}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}.$$

Une primitive est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + i\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$.

– Deuxième espèce, $x \mapsto \frac{p(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}$, où $\alpha^2 - 4\beta < 0$, $\deg p \leq 1$. On écrit $p(x)$ comme $\lambda(2x+\alpha)+\mu$.

- La partie $x \mapsto \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}$ est de la forme $\frac{u'}{u^n}$. Une primitive est $x \mapsto \ln(x^2+\alpha x+\beta)$ si $n=1$; $x \mapsto \frac{1}{1-n} \times \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{n-1}}$ si $n \geq 2$.
- Reste $x \mapsto \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}$. On écrit $x^2+\alpha+\beta = (x+\frac{\alpha}{2})^2 + (\beta - \frac{\alpha^2}{4})$. Par changement de variable, on se ramène à $x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^n}$. Pour $n=1$, une primitive est $\arctan(x)$. Pour $n \geq 2$, on procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} \\ &= \int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+1)^n} - \int \frac{2x \times \frac{x}{2}dx}{(x^2+1)^n} \\ I_n &= I_{n-1} - \left(\left[\frac{1}{1-n}(x^2+1)^{-n+1} \times \frac{x}{2}\right] - \int \frac{1}{1-n}(x^2+1)^{-n+1} \times \frac{dx}{2}\right). \end{aligned}$$

On fait une IPP à droite, en prenant $v'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^n}$ et $u(x) = \frac{x}{2}$. La dernière intégrale est un multiple de I_{n-1}.