DS 8 de mathématiques – Reprise

1 Exercice – Deux questions d'asymptotique

1. (a) On pense bien sûr à faire une comparaison série-intégrale. Dans le cours, on l'a toujours utilisé pour obtenir seulement un équivalent. Mais ici, l'encadrement obtenu montre qu'on connait la valeur de la somme à $o(n^2)$ près ; on a donc directement le développement asymptotique recherché.
   (b) Quand on veut l'équivalent d'une exponentielle, on sait qu'il faut connaître le terme à l'intérieur à $o(1)$ près. Écrire simplement $e^{o(1)} \sim 1$ pour justifier ce passage ; plutôt que de faire de longues phrases.
2. (a) RAS
   (b) Il y a de nombreuses façons de faire cette question. Le plus simple (sans être le plus éclairant) est d'étudier la monotonie de x_λ avec λ pour justifier qu'il y a une limite, puis montrer que cette limite ne peut être que 1. Pour ma part, j'ai montré directement que x_λ était compris entre 1 et $1+\dfrac{2}{\lambda}$ (raison : puisque e^{1/x_λ} va tendre vers e, il est naturel de comparer x_λ à un nombre y_λ tel que y_λ^λ a une limite connue strictement plus grande que e). Il y a d'autres variantes.
   (c) Pure technique. La difficulté n'est pas de mener les calculs, mais de s'y retrouver sur les tailles des quantités considérées. Bien étudier le corrigé et les exercices correspondants sur ce thème.

2 Exercice – Un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p Q^k$

1. (a) Dans cette question et la suivante, on s'en sort avec des majorations simples. Penser que quand on doit majorer un produit de quantités positives, on peut majorer l'un ou l'autre des facteurs (ou bien sûr faire des choses plus compliquées).
   (b) RAS
   (c) Trop d'erreurs d'étourderie sur l'IPP. N'importe qui peut faire une erreur de signe/de facteur sur ces questions ; c'est le genre de questions où on doit être particulièrement attentif pour ne pas se tromper.
   (d) RAS
2. De façon générale, on privilégie l'utilisation d'un résultat précédemment démontré (et on pense alors immédiatement à faire un changement de variable), plutôt qu'une phrase vague du type *Comme avant…*.

3. (a) Le cas $p \leq 0$ posait problème pour la CSI. On pouvait ou bien remarquer qu'on avait croissance de la fonction à partir d'un certain rang (ce qui suffit ici) ; ou bien faire comme dans le corrigé (on majore les deux facteurs séparément, ce qui ici se simplifie bien, car on veut juste un O).
   (b) Transformation d'Abel classique, aidée par l'énoncé. Faire une récurrence sur ce genre de questions ne fait pas progresser.
   (c) Ou bien avec le TAF, ou bien par des arguments asymptotiques.
   (d) RAS

3 Problème – Sur la convergence au sens d'Abel

3.1 Lemme de Toeplitz

1. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs, si $\sum v_n$ est convergente et si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ est convergente. On n'a ni besoin ni envie dans ce théorème de comparaison de parler des sommes partielles (ce qui revient à refaire l'argument du début du cours sur les séries).

2. RAS

3. La difficulté est de dire les choses dans le bon ordre. Il faut éviter de parler d'un N et d'un t comme si on savait de qui il s'agit (ils sont quelconques à la question précédente ; ile ne le seront pas dans cette question). Une preuve bien construite devrait se faire dans cet ordre : déclaration d'un $\varepsilon > 0$; déclaration d'un N suffisamment grand tel que ... ; déclaration d'un $\delta > 0$ tel que si $t > 1 - \delta$, alors ...

3.2 Théorème d'Abel

4. (a) Comme Q1.
   (b) Il est plus rapide (et moins confus) de partir du membre de gauche et du fait que $u_n = U_n - U_{n-1}$, que de partir du membre de droite et d'écrire que $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
   (c) Il faut évidemment bien définir les fonctions qui jouent le rôle du $p_n(t)$ dans le lemme de Toeplitz et vérifier qu'elles satisfont les bonnes propriétés. Trop d'élèves se trompent sur les sommes (finies ou infinies) des termes d'une suite géométrique, en oubliant la factorisation par le premier terme de la somme.

5. **Une application.**
   (a) Le plus rapide est d'utiliser l'astuce classique $\frac{1}{n} = \int_0^1 t^{n-1}dt$, pour $n \geq 1$. On peut s'en sortir en dérivant, plutôt qu'en intégrant.
   (b) La méthode a été revue dans le cours sur les fractions rationnelles.
   (c) Vu l'indication, on doit avoir de sérieux doutes sur le terme $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$. Si on se demande comment on peut le simplifier, on trouve (normalement) la réponse.

3.3 Convergence au sens de Cesàro et au sens d'Abel

6. Beaucoup d'erreurs de calcul pour un exemple où U_n varie simplement entre 0 et 1.
7. RAS
8. Beaucoup d'arguments inutilement compliqués ; le plus simple est d'écrire la définition de la convergence au sens de Cesàro et, par une manipulation semi-astucieuse, d'exprimer $\dfrac{U_n}{n}$ comme la différence de deux termes convergeant vers la même limite.
9. Quand on donne un contre-exemple, on doit définir u_n, pas U_n (éventuellement on définit U_n, en disant que $u_n = U_n - U_{n-1}$). Pour montrer que l'exemple ne converge pas au sens de Cesàro, le plus rapide est d'utiliser Q7 (là encore, les élèves qui écrivent *Comme à la Q7* devraient d'abord se demander si elle ne peut pas être utilisée).
10. **Théorème de Frobenius.**
    (a) RAS
    (b) Calcul un peu technique. Deux ou trois élèves ont remarqué qu'on pouvait utiliser à répétition la question 4.b). C'est très bien ; j'avoue n'y avoir pas pensé sur le moment et avoir privilégié un calcul bourrin (mais qui marche bien).
    (c) L'utilisation du lemme de Toeplitz devrait être assez claire vu la façon dont est écrite la somme précédente (pourquoi s'amuse-t-on à diviser et multiplier par n sinon pour mettre en évidence une certaine quantité ?).

3.4 Calculs de sommes de séries divergentes

11. (a) RAS
    (b) Question technique. Avec nos connaissances actuelles, on a besoin d'écrire explicitement la dérivée k-ème de f_N pour pouvoir ensuite considérer sa limite. D'où le recours à la formule de Leibniz.
    Certains ont tenté une récurrence, mais ça ne me semble pas clair (en tout cas, la propriété devrait parler de toutes les fonctions $f_N^{(}k)$, pas juste de la limite quand $N \to +\infty$).
    (c) RAS
12. (a) Même si c'est évident, on vérifie les hypothèses du CSA pour l'appliquer.
    (b) Question délicate ; il fallait comprendre que les sommes de la question 11 étaient très proches des sommes qu'on considère dans cette question.
    (c) RAS
13. (a) RAS
    (b) RAS