

Semaine 25 - Fractions rationnelles – Dénombrement

1 Fractions rationnelles

- Construction de $\mathbb{K}(X)$ (HP)
- $\mathbb{K}(X)$ est un corps
- Forme irréductible, irréductible unitaire d'une fraction rationnelle, degré
- Racines et pôles, multiplicités
- Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle
- Partie entière d'une fraction rationnelle
- Théorème de décomposition en éléments simples.
La preuve de l'existence a été esquissée sur un corps quelconque ; l'unicité a été admise
- Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ si $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé
- Décompositions en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$; calculs pratiques.
En particulier, exploitation des symétries et partie entière d'une puissance de X fois la fraction
- Application au calcul d'intégrales de fonctions rationnelles.

2 Dénombrement

- Généralités sur les ensembles finis
- Cardinal d'une union disjointe ; d'un recouvrement disjoint
- Lien entre les cardinaux et l'injectivité/la surjectivité/la bijectivité
- Si E et F sont de même cardinal, $f : E \rightarrow F$ est bijective ssi injective ssi surjective
- Cardinal d'une union ; formule du crible (HP)
- Cardinal d'un produit cartésien ; d'une puissance ensembliste ; de l'ensemble des fonctions F^E ; de $\mathcal{P}(E)$
- Si \mathcal{R} relation d'équivalence sur E et si toutes les classes ont même cardinal r , alors il y a $\frac{|E|}{r}$ classes
- Principe des tiroirs
- Listes ; listes sans répétition ; combinaisons ; nombre d'injections ; nombre de permutations
- Démonstration combinatoire des principales formules sur les coefficients binomiaux (symétrie ; Pascal ; chef ; Vandermonde)
- Coefficients multinomiaux, dénombrement d'anagrammes
- Nombres de Bell ; formule de récurrence

- Nombres de Catalan ; définition par récurrence et formule (*sera fait lundi en TD*)
- Nombres de Stirling de deuxième espèce (*en DM*)

3 Questions de cours

- Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$, avec P scindé
- Calculs de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$
On évitera les excès de technicité
- Calcul d'intégrales de fonctions rationnelles ; ou calculs s'y ramenant
- Démonstration combinatoire d'une formule sur les coefficients binomiaux
(*Sans indication pour symétrie, Pascal, chef, Vandermonde*)
- Démonstration de la formule de récurrence sur les nombres de Bell
- Dénombrement des anagrammes d'un mot