24 - Dénombrement

Jeremy Daniel

> I have the feeling that we don't understand at all the extraordinary interplay of combinatorics and what I would call "conceptual" mathematics.
>
> J. Dieudonné, *Schur functions and group representations*

1 Généralités sur les ensembles finis

1.1 Cardinal d'un ensemble

Lemme 1.1
Soient n et p deux entiers naturels. Il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ ssi $n = p$.

Définition 1.2 (Cardinal d'un ensemble fini)
Un ensemble E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans E. Dans ce cas, n est unique : c'est le cardinal de E.

Notation 1.3
On notera $|E|$ pour le cardinal d'un ensemble. D'autres notations sont possibles : $\sharp E$ ou $\mathrm{Card}(E)$ notamment.

Remarque 1.4
Un ensemble E qui n'est pas fini est dit infini. Un ensemble infini contient des parties finies de cardinal arbitrairement grand.

Proposition 1.5 (Principe d'addition)
Soit E un ensemble. Soient A et B des parties finies et disjointes de E. Alors $A \cup B$ est finie et $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Définition 1.6 (Recouvrement disjoint de E)
Soit E un ensemble. Un recouvrement disjoint de E est une famille de parties de E, deux à deux disjointes, dont l'union est égale à E.

Remarque 1.7
On tâchera de ne pas confondre les notions de partition et de recouvrement disjoint, assez proches. Les partitions sont des ensembles de parties, les recouvrement disjoints des familles de parties. De plus, on ne demande pas aux parties d'un recouvrement disjoint d'être non vides.

Proposition 1.8 (Généralisation à n parties)
Soit E un ensemble. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties finies de E, deux à deux disjointes. Alors $\bigcup_{k=1}^{k} A_k$ est finie et $\left|\bigcup_{k=1}^{k} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$.
En particulier, si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un recouvrement disjoint de E, $|E| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$.

Théorème 1.9 (Caractérisation des ensembles finis et inégalités)
Soit F un ensemble fini de cardinal p, soit E un ensemble.
- *S'il existe une injection de E dans F, alors E est fini et $|E| \leq p$.*
- *S'il existe une surjection de F dans E, alors E est fini et $|E| \leq p$.*
- *S'il existe une bijection de F dans E, alors E est fini et $|E| = p$.*

De plus, il y a égalité $|E| = p$ dans les deux premiers cas ssi l'injection/la surjection est en fait une bijection.

Remarque 1.10
Le premier point implique : si E est une partie d'un ensemble fini F de cardinal p, alors E est fini, $|E| \leq p$ et il y a égalité ssi $E = F$.

Corollaire 1.11 (Principe du demi-fainéant ensembliste)
Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal n. Soit f une application de E dans F. Il y a équivalence entre f injective / f surjective / f bijective.

1.2 Cardinal d'une union

Proposition 1.12 (Principe de soustraction)
Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E. La partie $A - B$ est finie et

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|.$$

Cas particulier : si A est une partie d'un ensemble fini E, alors $|\overline{A}| = |E| - |A|$.

Proposition 1.13 (Cardinal d'une union)
Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Proposition 1.14 (Formule du crible, HP)
Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties finies d'un ensemble E. Alors,

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Exercice 1.15
Compter le nombre d'entiers $n \in [\![1, 100]\!]$ divisibles par 2, 3 ou 5.

1.3 Autres cardinaux élémentaires

Proposition 1.16 (Principe de multiplication)
Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis. Alors, $E_1 \times E_2$ est fini et

$$|E_1 \times E_2| = |E_1| \times |E_2|.$$

Remarque 1.17
On peut bien sûr généraliser à un produit de n ensembles finis.

Corollaire 1.18 (Cas d'une puissance ensembliste)
Soit E un ensemble fini, n un entier naturel. E^n est fini et

$$|E^n| = |E|^n.$$

Corollaire 1.19 (Cardinal d'un ensemble de fonctions)
Soient E et F deux ensembles finis. Alors, $F^E = \mathcal{F}(E, F)$ est fini et

$$|F^E| = |F|^{|E|}.$$

Corollaire 1.20 (Cardinal de l'ensemble des parties)
Soit E un ensemble fini. Alors, $\mathcal{P}(E)$ est fini et

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}.$$

Proposition 1.21 (Principe de division)
Soit E un ensemble fini. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E dont toutes les classes d'équivalence ont même cardinal r. Alors, $\mathcal{R}$ a $\dfrac{|E|}{r}$ classes d'équivalence.

Proposition 1.22 (Principe des tiroirs)
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, ayant m classes d'équivalence. Alors, il existe une classe d'équivalence de cardinal au moins $\lceil \frac{n}{m} \rceil$.

2 Listes et combinaisons

2.1 Listes avec/sans répétition

Définition 2.1 (p-liste)
Soit E un ensemble, soit $p \in \mathbb{N}$. Une p-liste d'éléments de E est un élément de E^p.

Remarque 2.2
Par convention, pour tout ensemble E, E^0 est un ensemble contenant un unique élément : la liste vide (à valeurs dans E).

Proposition 2.3 (Nombre de p-listes)
Soit E un ensemble fini, soit $p \in \mathbb{N}$. Il y a $|E|^p$ p-listes d'éléments de E.

Définition 2.4 (p-liste sans répétition)
Une p-liste $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E est dite sans répétition si $\forall i \neq j \in [\![1, p]\!], x_i \neq x_j$.

Remarque 2.5
On parle aussi d'arrangement.

Proposition 2.6 (Nombre de p-listes sans répétition)
Soit E un ensemble fini de cardinal n, soit $p \in \mathbb{N}$.
Le nombre de p-listes sans répétition d'éléments de E est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \prod_{k=0}^{p-1}(n-k).$$

Remarque 2.7
En particulier, si $p = n$, il y a $n!$ telles listes. Si $p > n$, il n'y en a aucune.

Proposition 2.8 (Nombre d'injections)
Soient E et F des ensembles de cardinaux respectifs p et n.
Le nombre d'injections de E dans F est égal au nombre de p-listes sans répétition à valeurs dans F : $n(n-1)\dots(n-p+1)$.

Corollaire 2.9 (Nombre de permutations)
Si E est un ensemble fini de cardinal n, il y a $n!$ permutations de E.

2.2 Combinaisons

Définition 2.10 (p-combinaison)
Soit E un ensemble fini. Une p-combinaison de E est une partie de E de cardinal p.

Remarque 2.11
On prendra garde à ne pas confondre les notions de listes/listes sans répétition/combinaison. Dans le cadre d'un exercice de probabilités dans lequel p boules (discernables) sont tirées dans une urne en contenant n :

- Si les tirages sont successifs et avec remise, l'expérience sera décrite avec des p-listes ;
- Si les tirages sont successifs et sans remise, avec des p-listes sans répétition ;
- Si les tirages sont simultanés, avec des p-combinaisons.

On verra cependant que cette distinction entre expériences successives et simultanées ne va pas toujours de soi.

Théorème 2.12 (Nombre de p-combinaisons)
Si E est de cardinal n et si $0 \leq p \leq n$, le nombre de p-combinaisons de E est

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}.$$

Remarque 2.13
On garde aussi la convention selon laquelle $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$.

Proposition 2.14 (Formules principales - Rappel)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- *Formule de symétrie :* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
- *Formule de Pascal :* $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$;
- *Formule du chef :* $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

2.3 Autres identités sur les coefficients binomiaux - HP

Théorème 2.15 (Formule de Vandermonde)
Soient n_1, n_2, n trois entiers naturels tels que $n = n_1 + n_2$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i} = \binom{n}{k}.$$

Proposition 2.16 (Formule des k chefs)
On considère trois entiers k, p et n tels que $0 \leq k \leq p \leq n$. Alors,

$$\binom{p}{k}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}.$$

Proposition 2.17 (Somme des coefficients binomiaux sur une colonne)
Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{p=k}^{n} \binom{p}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Proposition 2.18 (Somme des coefficients binomiaux sur les diagonales ascendantes)
On note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par récurrence par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_n.$$

Exercice 2.19
Interprétation combinatoire de la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

3 Quelques thèmes classiques - HP

3.1 Coefficients multinomiaux, anagrammes

Définition 3.1 (Coefficient multinomial)
Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ tels que $k_1 + \cdots + k_r = n$. On définit :

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}.$$

Remarque 3.2
Le coefficient binomial usuel $\binom{n}{k}$ est donc écrit $\binom{n}{k, n-k}$ dans ces notations.

Proposition 3.3 (Interprétation combinatoire)
Soit E un ensemble de cardinal n. Soient $k_1, \dots, k_r$ des entiers tels que $k_1 + \cdots + k_r = n$. Le coefficient multinomial $\binom{n}{k_1, \dots, k_r}$ est le nombre de recouvrements disjoints de E à r parties $(A_1, \dots, A_r)$, telles que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $|A_i| = k_i$.

Exercice 3.4
Combien d'anagrammes les mots POIRE ET BANANE comptent-ils ? (par anagramme, on entend n'importe quel mot obtenu par permutation des lettres, qu'il ait un sens ou non). Généraliser en utilisant les coefficients multinomiaux.

3.2 Nombres de Bell

Définition 3.5 (Nombres de Bell)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit le n-ème nombre de Bell B_n comme le nombre de partitions (ou de relations d'équivalence) sur un ensemble de cardinal n.

Exercice 3.6
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

3.3 Nombres de Catalan

Définition 3.7 (Nombres de Catalan)
On définit la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de Catalan par récurrence : $C_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$

Remarque 3.8
Ces nombres interviennent dans différents problèmes de combinatoire. Par exemple, C_n est le nombre de mots qu'on peut former avec n lettres X et n lettres Y tels que, quand on parcourt le mot de gauche à droite, on a toujours compté au moins autant de X que de Y. C'est aussi le nombre de chemins possibles pour relier les points $(0, 0)$ et (n, n), en empruntant des arêtes horizontales (vers la droite) ou verticales (vers le haut), sans jamais dépasser strictement la diagonale des points (k, k).

Théorème 3.9 (Formule close)
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Remarque 3.10
Il n'est pas aisé de montrer que cette suite vérifie bien la relation de récurrence donnée.

3.4 Nombres de Stirling de seconde espèce

DÉFINITION 3.11 (Nombres de Stirling de seconde espèce)
Soient k et n des entiers naturels. On note $\left\{ n \atop k \right\}$ le nombres de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties.

REMARQUE 3.12
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\}$.

PROPOSITION 3.13 (Formule de récurrence)

$$\forall n, k \geq 1, \left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\},$$

avec de plus $\left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1$ *et* $\forall n \geq 1$, $\left\{ n \atop 0 \right\} = \left\{ 0 \atop n \right\} = 0$.

PROPOSITION 3.14 (Lien avec le nombre de surjections)
Soient $k, n \in \mathbb{N}$. *Le nombre* $k! \times \left\{ n \atop k \right\}$ *est le nombre de surjections d'un ensemble à* n *éléments dans un ensemble à* k *éléments.*

PROPOSITION 3.15 (Formule pour $\left\{ n \atop k \right\}$)
On a :

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

REMARQUE 3.16
Il y a bien sûr aussi des nombres de Stirling de première espèce. Le lecteur intéressé pourra consulter la référence de son choix.