Semaine 26 – Dénombrement – Probabilités

1 Dénombrement

Reprise du programme précédent

2 Espaces probabilisés finis

- Dictionnaire des probabilités : univers, évènement, issue, évènement certain, évènement impossible, évènements élémentaires, évènement contraire, conjonction et disjonction d'évènements, évènements incompatibles
- Système complet d'évènements
- Variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E
- Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, etc.
- Mesure de probabilité sur un univers fini, espace probabilisé fini
- Probabilité uniforme
- Propriétés basiques
- La donnée d'une mesure de probabilité sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est équivalente à la donnée d'une liste $(p_1, \dots, p_n) \in [0,1]^n$ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ – la probabilité P étant entièrement déterminée par les conditions $P(\{\omega_k\}) = p_k$.
- Loi d'une variable aléatoire
- Variable image $f(X)$; la loi de $f(X)$ est déterminée par celle de X
- Lois usuelles : loi uniforme $\mathcal{U}(E)$, loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, loi de Rademacher (loi uniforme sur $\{-1,1\}$)

3 Conditionnement et indépendance

- Probabilité de B sachant A, avec $P(A) > 0$
- Notations $P_A(B)$ (le plus souvent) ou $P(B \mid A)$
- $P_A : B \mapsto P_A(B)$ est une mesure de probabilité sur Ω
- Formule des probabilités composées
- Formule des probabilités totales ; convention $P(A)P_A(B) = 0$ si $P(A) = 0$
- Formule de Bayes ; variante avec formule des probabilités totales
- Évènements indépendants
- Indépendance mutuelle pour n évènements

- Si $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants et si $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, alors $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement indépendants
- Application : démonstration probabiliste de la formule $\phi(n) = n \prod_{p_k \mid n} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$, où ϕ désigne l'indicatrice d'Euler

4 Couples de variables aléatoires

- Loi conjointe de deux variables aléatoires
- Lois marginales
- Lois conditionnelles
- Variables aléatoires indépendantes
- Application : loi d'une somme de deux variables aléatoires
- Extension à n variables aléatoires
- Lemme des coalitions
- Si $X_1, \dots, X_n$ sont n v. a. indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ a pour loi $\mathcal{B}(n, p)$

5 Espérance

- Espérance d'une variable aléatoire réelle
- Espérance des lois usuelles
- Linéarité de l'espérance ; positivité ; croissance
- Formule de transfert
- Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$
- Inégalité de Markov

6 Questions de cours

- Divers dénombrements – cf. programme précédent
- Une mesure de probabilité sur un univers fini est entièrement déterminée par les probabilités des évènements élémentaires
- Un énoncé d'une formule de probabilités
- Calcul probabiliste de l'indicatrice d'Euler $\phi(n)$
- Si $X_1, \dots, X_n$ sont n v. a. indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ a pour loi $\mathcal{B}(n, p)$
- Linéarité de l'espérance (en écrivant l'espérance comme une moyenne indexée par $\omega \in \Omega$)
- Inégalité de Markov