

DM 20 - Nombres de Stirling, nombres de Catalan

1 Nombre de surjections

1. Une application $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$ est dans $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ ssi son image est incluse dans $\llbracket 1, p \rrbracket - \{i_1, \dots, i_k\}$. Cet ensemble a $p - k$ éléments.

Il y a donc $(p - k)^n$ applications dans $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$.

2. Une application $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$ est une surjection ssi tout élément $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ a un antécédent par f ssi $f \notin A_k$, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Donc,

$$\mathcal{S}(n, p) = \prod_{k=1}^p \overline{A_k} = \overline{\bigcup_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} A_k},$$

le complémentaire étant pris dans $\mathcal{F}(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket 1, p \rrbracket)$.

3. Par la formule du crible, on a

$$\left| \bigcup_{k=1}^p A_k \right| = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Le calcul du cardinal des intersections a été fait à la question 1. On a donc :

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{k=1}^p A_k \right| &= \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} (p - k)^n \\ &= \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \binom{p}{k} (p - k)^n. \end{aligned}$$

Comme $S(n, p) = p^n - \left| \bigcup_{k=1}^p A_k \right|$, on obtient :

$$S(n, p) = p^n - \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \binom{p}{k} (p - k)^n = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} (p - k)^n.$$

D'où $S(n, p) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$, en utilisant le changement de variable $k \mapsto p - k$ et la formule de symétrie.

2 Nombres de Stirling

1. Nombres de Stirling de deuxième espèce.

- (a) Les partitions de $\mathcal{P}(n, k)$ sont de deux types, celles pour lesquelles $\{n\}$ constitue une partie de la partition, et celles pour lesquelles ce n'est pas le cas. On note $\mathcal{P}_1(n, k)$ et $\mathcal{P}_2(n, k)$ l'ensemble des partitions du premier et du de deuxième type.

Il y a autant de partitions dans $\mathcal{P}_1(n, k)$ que de partitions dans $\mathcal{P}(n-1, k-1)$: en effet, il suffit d'ajouter/d'enlever la partie $\{n\}$ pour passer d'une partition de $\mathcal{P}_1(n, k)$ à une partition de $\mathcal{P}(n-1, k-1)$. Donc $|\mathcal{P}_1(n, k)| = \binom{n-1}{k-1}$.

Les partitions de $\mathcal{P}_2(n, k)$ sont obtenues en ajoutant l'élément n à une partie d'une partition de $\mathcal{P}(n-1, k)$. On a donc $|\mathcal{P}_2(n, k)| = \binom{n-1}{k} \times k$. *Le premier facteur correspond au choix de la partition ; le deuxième au choix de l'une des k parties à laquelle on ajoute l'élément n .*

Par le principe d'addition, on a finalement

$$\binom{n}{k} = k \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

- (b) Notons $\mathcal{P}(n) : \forall x \in \mathbb{R}, x^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k$. On montre $\mathcal{P}(n)$, pour $n \geq 1$, par récurrence sur n .

- Initialisation. Soit $x \in \mathbb{R}$. On doit montrer que $x = \binom{n}{1} x$. Or $\binom{n}{1} = 1$: il y a une unique façon de partitionner un ensemble en une seule partie.
- Hérédité. Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n \times x \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k \times (x - k + k) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (x^{k+1} + kx^k) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k \\ &= \sum_{k=2}^n \left(\binom{n}{k-1} + k \binom{n}{k} \right) x^k + \binom{n}{n} x^{n+1} + 1 \binom{n}{1} x^1 \\ x^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k. \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé la formule de récurrence montrée à la question précédente ; ainsi que $\binom{n}{n} = \binom{n}{1} = 1$ (il y a une unique partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en une seule/en n partie(s)) et aussi $x^1 = x$.

- (c) Soit $y \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Par définition de \mathcal{R}_f , les ensembles de la forme $f^{-1}(y)$ sont des classes d'équivalence pour \mathcal{R}_f , si on a $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Comme f est surjective, cette condition est toujours satisfaite.

On a donc $P_f = \{f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(k)\}$. C'est bien une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$, composée de k parties.

Donc $P_f \in \mathcal{P}(n, k)$.

- (d) Soit $P \in \mathcal{P}(n, k)$. Notons $P = \{P_1, \dots, P_k\}$. Si $f \in \mathcal{S}(n, k)$, on a $P = P_f$ ssi $\{P_1, \dots, P_k\} = \{f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(k)\}$. Ces deux ensembles sont de cardinal k ; l'égalité a donc lieu ssi on peut renuméroter les P_j pour que l'égalité ait lieu terme à terme, c'est-à-dire ssi il existe une permutation σ de $\llbracket 1, k \rrbracket$ telle que

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, P_{\sigma(j)} = f^{-1}(j).$$

f est entièrement déterminée par ces égalités : une fois choisie σ , f est l'application définie par

$$\forall x \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(x) = j \iff x \in P_{\sigma(j)}.$$

Ainsi, P a autant d'antécédents par Φ qu'il y a de permutations de $\llbracket 1, k \rrbracket$. Donc, P a $k!$ antécédents. En particulier, Φ est surjective.

- (e) On applique le principe de division : $|\mathcal{P}(n, k)| = \frac{1}{k!} |\mathcal{S}(n, k)|$. Donc,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} S(n, k).$$

- (f) Si $x = p$ est un entier naturel, on a $p^k = \frac{p!}{(p-k)!}$ si $k \leq p$ et 0 sinon. La formule appliquée à p donne donc :

$$p^n = \sum_{k=1}^{\min(n,p)} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{p!}{(p-k)!}.$$

Or $\frac{p!}{(p-k)!} = k! \binom{p}{k}$ et $k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = S(n, k)$. Donc,

$$p^n = \sum_{k=1}^{\min(n,p)} \binom{p}{k} S(n, k).$$

Le membre de gauche est le nombre d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. Chaque terme du membre de droite correspond au nombre de ces applications dont l'image est de cardinal k (On choisit les k images parmi les p possibles, puis une surjection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers ces k images.)

2. Nombres de Stirling de première espèce.

- (a) Il y a $k!$ k -uplets (y_1, \dots, y_k) tels que $\{y_1, \dots, y_k\} = \{x_1, \dots, x_k\}$. Chacun de ces k -uplets est en relation avec k k -uplets (lui-même inclus).

Il y a donc $\frac{k!}{k} = (k-1)!$ cycles de support $\{x_1, \dots, x_k\}$.

- (b) Chacune des parties P_i est le support de $(n_i - 1)!$ cycles. Il y a donc $\prod_{i=1}^k (n_i - 1)!$ partitions en cycles, de support \mathcal{P} .

(c) cf. document sur cahier-de-prepa

(d) D'après la question précédente (b), l'application Ψ est surjective. On a donc $|\mathcal{C}(n, k)| \geq |\mathcal{P}(n, k)|$, c'est-à-dire $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \geq \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$. Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que chaque partition \mathcal{P} ait un unique antécédent. Avec les notations de la question b), cela revient à demander que pour chaque partition \mathcal{P} :

$$\prod_{i=1}^k (n_i - 1)! = 1.$$

Cela est équivalent à $n_i = 1$ ou $n_i = 2$, pour tout i . Ainsi, il y a égalité ssi toutes les partitions dans $\mathcal{P}(n, k)$ ont des parties de cardinal 1 ou 2. Ceci est finalement équivalent à $k \geq n - 1$.

(e) Les partitions en cycles de $\mathcal{P}(n, k)$ sont de deux types : celles pour lesquelles n est isolé et celles pour lesquelles il ne l'est pas. Il y en a autant du premier type que de partitions en cycles dans $\mathcal{P}(n - 1, k - 1)$. Pour celles du deuxième type, on se convainc que toutes ces partitions sont obtenues de façon unique en partant d'une partition de $\mathcal{P}(n - 1, k)$ et en insérant l'élément n dans un cycle. Il y a $n - 1$ choix pour l'insertion (on décide de l'élément qui aura n pour successeur).

Par principes de multiplication et d'addition, on trouve la formule annoncée.

(f) On remarque que $1^{\overline{n}} = n!$. On a donc

$$n! = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

On peut en proposer une interprétation combinatoire : il y a $n!$ permutations et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est le nombre de permutations ayant k cycles dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints (en comptant les points fixes = cycles de longueur 1).

(g) Soit x un réel. On a

$$(-x)^{\overline{n}} = (-x)(-x+1)\dots(-x+n-1) = (-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1) = (-1)^n x^{\underline{n}}.$$

On applique la formule précédente en substituant $-x$ à x :

$$(-x)^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-x)^k.$$

D'où, avec le calcul préliminaire :

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k.$$

(h) On a montré en 1.e) que pour tout réel x et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k.$$

Avec la formule précédente, on en déduit :

$$x^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} (-1)^{k-m} x^m.$$

D'où, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$x^n = \sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} (-1)^{k-m} \right) x^m.$$

C'est une égalité entre deux polynômes. Par principe d'identification des coefficients, on a donc :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} (-1)^{k-m} = \delta_{m,n}.$$