DM 21 - Théorèmes de Weierstrass [redacted]

0. ~~Si $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, f est bornée sur le segment $[a,b]$ par le théorème des bornes atteintes. Si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est 2π-périodique, on a l'égalité $f(\mathbb{R}) = f([0,2\pi])$. Comme f est continue sur le segment $[0,2\pi]$, f est bornée sur ce segment par le théorème des bornes atteintes. Elle est donc aussi bornée sur $\mathbb{R}$.~~

1 Théorème de Weierstrass *via* les polynômes de Bernstein

1. Par le théorème de transfert, on a
$$E\left(f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$
Cette expression est bien polynomiale de degré au plus n.

2. Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est uniformément continue par le théorème de Heine. D'où le résultat.

3.
   - L'égalité $|B_n(f)(x)-f(x)| = \left|E\left(f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right)\right|$ vient de la définition de $B_n(f)(x)$ et du fait que $E\big(f(x)\big) = f(x)$ (car $f(x)$ est une constante).
   - L'inégalité $\left|E\left(f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right)\right| \le E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\right)$ vient de l'inégalité triangulaire.
   - L'égalité $E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\right) = E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{A_{n,x}}\right)+E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}}\right)$ vient de ce que $1 = \mathbb{1}_{A_{n,x}} + \mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}}$ et de la linéarité de l'espérance.

4. $\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{A_{n,x}}$ est non nulle seulement quand $\left|\frac{X_{n,x}}{n}-x\right| \le \delta$. Dans ce cas, par définition de δ, on a $\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, $\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{A_{n,x}} \le \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, par croissance de l'espérance, son espérance aussi est inférieure ou égale à $\frac{\varepsilon}{2}$.

5. Par inégalité triangulaire, on a $\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}} \le \left(f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)+|f(x)|\right)\mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}} \le 2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}}$.
Par croissance de l'espérance, on a donc :
$$E\left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}}\right) \le 2\|f\|_\infty E(\mathbb{1}_{\overline{A_{n,x}}}) = 2\|f\|_\infty P(\overline{A_{n,x}}).$$

6. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a
$$P(\overline{A_{n,x}}) = P(|X_{n,x}-nx| > n\delta) \le \frac{V(X_{n,x})}{n^2\delta^2} = \frac{nx(1-x)}{n^2\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2}$$
car $x(1-x) \le \frac{1}{4}$ si $x \in [0,1]$.
En combinant les inégalités des questions 3, 4 et 5, on a le résultat.

7. Étant fixés ε et δ, la quantité $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\ge N$, $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}\le\dfrac{\varepsilon}{2}$.
Alors, pour $n\ge N$, on a $|B_n(f)(x)-f(x)|\le\varepsilon$. Ceci est indépendant de x ; donc pour $n\ge N$, $\|B_n(f)-f\|_\infty\le\varepsilon$. Donc $B_n(f)$ converge uniformément vers f, quand n tend vers $+\infty$.

[redacted] Le théorème de Weierstrass est démontré pour $[a,b]=[0,1]$ puisqu'on a vu que les $B_n(f)$ étaient des applications polynomiales.
Passons au cas général. On considère $f\in\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. La fonction $g : x\mapsto f\big(a+x(b-a)\big)$ est continue sur $[0,1]$. On peut donc considérer une suite P_n de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers g sur $[0,1]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose maintenant $Q_n(x)=P_n\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$. Alors, les Q_n sont des applications polynomiales et

$$\forall x\in[a,b], |f(x)-Q_n(x)| = |g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)-P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)| \le \|g-P_n\|_\infty,$$

la norme infinie étant prise sur $[0,1]$. Ceci montre que Q_n tend uniformément vers f sur $[a,b]$.
On a juste reparamétré le segment $[a,b]$ *par le segment* $[0,1]$.

~~9. Par linéarité, si P est un polynôme, on a $\int_a^b P(t)f(t)dt=0$. On considère maintenant une suite de polynômes P_n convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors,~~

$$\left|\int_a^b f(t)^2dt-\int_a^b P_n(t)f(t)dt\right| = \left|\int_a^b f(t)\big(f(t)-P_n(t)\big)dt\right| \le (b-a)\|f-P_n\|_\infty\|f\|_\infty,$$

~~les normes infinies étant prises sur $[a,b]$. Le membre de droite tend vers 0 quand $n\to+\infty$, donc $\int_a^b P_n(t)f(t)dt$ tend vers $\int_a^b f(t)^2dt$. Mais cette suite est identiquement nulle. Donc, on a $\int_a^b f(t)^2dt=0$. Comme f^2 est positive et continue, on a $f^2=0$ par propriété de stricte positivité de l'intégrale. Finalement, $f=0$.~~

~~10. Une telle fonction f doit elle-même êter polynomiale (ce qui limite l'intérêt...).
Considérons en effet P_n convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Alors, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\ge N$, $\|P_n-f\|_\infty\le 1$. Mais alors, Pour tout $n\ge N$, $\|P_n-P_N\|_\infty\le 2$. Or, P_n-P_N est une application polynomiale. Elle ne peut être bornée sur $\mathbb{R}$ que si elle est constante. Ainsi, il existe pour tout $n\ge N$, une constante c_n telle que $P_n=P_N+c_n$. La convergence uniforme de P_n implique la convergence de c_n (en évaluant en 0 p. ex., on trouve que $c_n\to f(0)-P_N(0)$). Et donc, par passage à la limite, $f=P_N+\lim_n c_n$.~~

~~2 Théorème de Fejer~~

~~11. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n(f)=\sum_{|k|\le n} c_n(f)e_k$, donc $S_n(f)$ est un polynôme trigonométrique.
Pour tout $n\ge 1$, $\sigma_n(f)$ est une combinaison linéaire des polynômes trigonométriques $S_k(f)$, donc c'est un polynôme trigonométrique.~~