

## Probabilités

### 1 Espaces probabilisés

**EXERCICE 1.** ♣ – ●○○ *Construction d'une mesure de probabilité*

Dans l'univers  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$ , montrer qu'il existe une unique mesure de probabilité  $P$  sur  $\Omega$  telle que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la probabilité de l'évènement  $\llbracket 1, k \rrbracket$  soit proportionnelle à  $k^2$ .

**EXERCICE 2.** ♣/◇ – ●○○ *Couplage de lois de Bernoulli*

Soient  $p, q \in [0, 1]$ . Déterminer toutes les lois conjointes possibles pour deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  telles que  $X \sim \mathcal{B}(p)$  et  $Y \sim \mathcal{B}(q)$ .

**EXERCICE 3.** ♣ – ●●○ *Variables symétriques*

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire telle que  $X$  et  $-X$  aient la même loi. Montrer qu'il existe un espace probabilisé fini  $(\Omega', P')$  et deux variables aléatoires indépendantes  $Y : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}_+$  et  $\varepsilon : \Omega' \rightarrow \{\pm 1\}$  telles que  $X$  et  $\varepsilon Y$  aient la même loi.

Peut-on en général faire en sorte que  $\Omega = \Omega'$  ?

### 2 Formule de Bayes

**EXERCICE 4.** ●○○ *Bayes est malade*

Un individu est testé positif à une maladie touchant une personne sur 1000. La probabilité d'une erreur du test (faux positif ou faux négatif) est de 1%. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

**EXERCICE 5.** ●○○ *Bayes travaille à l'usine*

Dans une usine, trois machines  $A$ ,  $B$  et  $C$  produisent le même type de pièces. La machine  $A$  produit 50% du total, la machine  $B$  30% et la machine  $C$  20%. 3% des pièces produites par  $A$  sont défectueuses. Ce pourcentage est de 4% pour la  $B$  et de 5% pour la  $C$ .

On prend une pièce au hasard et elle est défectueuse. Quelle est la probabilité que cette pièce ait été produite par la machine  $A$  ?

**EXERCICE 6.** ♣ – ●○○ *Bayes joue aux dés*

On dispose de  $N$  dés à 6 faces dont  $T$  sont truqués. Pour ces dés truqués, la probabilité d'obtenir un 6 est égale à  $1/2$ . On choisit un dé au hasard parmi les  $N$  et on le lance  $n$  fois. On obtient  $n$  fois le résultat 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?

**EXERCICE 7.** ♣ – ●○○ *Bayes siège au parlement*

L'Assemblée nationale est constituée d'une proportion  $p$  de députés conservateurs, qui ne changent jamais d'avis, et d'une proportion  $1 - p$  de députés progressistes qui changent d'avis au hasard, avec probabilité  $r$ , entre deux votes successifs. Au cours d'une séance, un certain député a voté deux fois de suite de la même façon.

1. Quelle est la probabilité que ce député soit conservateur ?
2. Quelle est la probabilité qu'il vote de la même façon la prochaine fois ?

### 3 Formule de transfert

**EXERCICE 8.** ○○○ *Espérance de  $\frac{1}{X}$*

On considère une variable aléatoire  $X$  dont la loi est donnée par les probabilités suivantes :

$P(X = 2) = P(X = 3) = 1/4$  et  $P(X = 4) = 1/2$ . Calculer  $E\left(\frac{1}{X}\right)$ .

**EXERCICE 9.** ●○○ *Avec une loi binomiale*

Soit  $X$  une variable de loi  $\mathcal{B}(n, p)$ . Calculer  $E(2^X)$  et  $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$ .

**EXERCICE 10.** ♣ – ●●○ *Avec deux variables aléatoires*

1. Soient  $X$  et  $Y$  indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(p)$ . Calculer  $E(|X - Y|)$ .
2. Même question si  $X$  et  $Y$  suivent la loi  $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .

### 4 Problèmes d'urnes

**EXERCICE 11.** ♣/◇ – ●○○ *Parité du nombre de tirages d'une boule*

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  ; on tire successivement  $n$  boules avec remise. Calculer la probabilité  $p_n$  de tirer la boule 1 un nombre impair de fois. Limite de  $p_n$  ?

**EXERCICE 12.** ●●○ *Urne de Polya*

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. À chaque fois qu'on tire une boule, on remet dans l'urne la boule tirée, ainsi qu'une boule de même couleur. Quelle est la loi du nombre de boules blanches au  $n$ -ième tirage ?

**EXERCICE 13.** ♣/◇ – ●●○ *Urne de Polya - une variante*

Une urne contient  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges. On tire une boule, on note sa couleur et on remet la boule accompagnée de  $d$  boules de sa couleur. On réitère l'expérience  $n$  fois. Quelle est la probabilité que la boule obtenue au  $n$ -ième tirage soit blanche ?

**EXERCICE 14.** ●●○ *Urne d'Ehrenfest*

On considère deux urnes  $A$  et  $B$  contenant en tout  $b$  boules, où  $b \geq 2$ . On tire de façon équiprobable une boule et on la change d'urne. On renouvelle l'expérience. On note  $X_n$  le nombre de boules dans l'urne  $A$  après  $n$  étapes et  $Y_n = X_{n+1} - X_n$ .

1. Déterminer  $E(Y_n)$  en fonction de  $E(X_n)$ .
2. En déduire  $E(X_n)$  et sa limite quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**EXERCICE 15.** ♣ – ●●○ *Loi du nombre de tirages*

Une urne contient  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges. On effectue des tirages successifs jusqu'à avoir tiré  $k$  boules blanches (avec  $k \leq b$ ). On note  $X$  le nombre de tirages ainsi effectués.

1. Déterminer la loi de  $X$  si les tirages sont effectués avec remise.
2. Même question sans remise.

## 5 Inégalités en probabilités

**EXERCICE 16.** ♣ – ●○○ *Espérance et inverse*

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Démontrer que  $E(X) \geq \frac{1}{E(\frac{1}{X})}$ .

**EXERCICE 17.** ♣ – ●●○ *Inégalité de Jensen*

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle et soit  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe. Montrer que  $\phi(E(X)) \leq E(\phi(X))$ .

**EXERCICE 18.** ♣/◇ – ●●○ *Probabilité que rien n'arrive*

Soient  $A_1, \dots, A_n$  des événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements  $A_k$  n'arrive est inférieure à  $\exp\left(-\sum_{k=1}^n P(A_k)\right)$ .

**EXERCICE 19.** ●●○ *Inégalité de Kosmanek*

Soient  $A$  et  $B$  deux événements. Montrer que  $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$ .

**EXERCICE 20.** ♣ – ●●● *Une inégalité étonnante*

Soient, dans un espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ ,  $A_1, \dots, A_n$  des événements. On définit, pour tout indice  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $C_k = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à au moins } k \text{ des événements } A_1, \dots, A_n\}$ .

Montrer que  $\prod_{k=1}^n P(C_k) \leq \prod_{k=1}^n P(A_k)$ .

**EXERCICE 21.** ♣ – ●●○ *Inégalité de Paley-Zygmund*

Soient  $X$  une variable aléatoire réelle positive ou nulle pour laquelle  $E(X^2) > 0$  et  $\eta \in [0, 1]$ .

1. Montrer que  $E(X \mathbb{1}_{\{X \geq \eta E(X)\}})^2 \leq E(X^2)P(X \geq \eta E(X))$ .
2. En déduire que  $P(X \geq \eta E(X)) \geq (1 - \eta)^2 \frac{E(X)^2}{E(X^2)}$ .

**EXERCICE 22.** ●●○ *Concentration d'une loi binomiale*

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on se donne  $X_n \sim \mathcal{B}(4n, 1/2)$ .

1. Calculer la variance de  $X_n$ .
2. Montrer que la suite  $(P(|X_n - 2n| \geq n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.
3. Montrer que la suite  $(P(|X_n - 2n| \leq n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et préciser sa limite.
4. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $x_n = \sum_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k}$ . Déterminer un équivalent simple de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**EXERCICE 23.** ●●○ *Inégalité de Cantelli*

Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $m$  et de variance  $V$ .

1. (a) Montrer que  $\forall x \geq 0, P(X - m \geq \varepsilon) \leq \frac{V + x^2}{(\varepsilon + x)^2}$ .  
 (b) En déduire que  $P(X - m \geq \varepsilon) \leq \frac{V}{V + \varepsilon^2}$  et que  $P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{2V}{V + \varepsilon^2}$ .

(c) Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

- Retrouver le résultat précédent en remarquant que  $E(\varepsilon + m - X) \leq E((\varepsilon + m - X)\mathbb{1}_{X < m + \varepsilon})$ , et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à  $(\varepsilon + m - X)\mathbb{1}_{X < m + \varepsilon}$ .

**EXERCICE 24.** ♣ - ●●○ *Inégalité de Hoeffding*

- Soit  $S_n$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{B}(n, p)$ . Montrer que pour tout  $a \in ]p, 1[$ ,

$$\forall s \in \mathbb{R}_+, P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-nsa} (1 - p + pe^s)^n.$$

- Parmi les majorations de la question précédente, identifier la plus précise.
- Si  $0 < q < p < 1$ , on définit la *divergence de Kullback-Leibler*

$$D(p\|q) = (1 - p) \ln\left(\frac{1 - p}{1 - q}\right) + p \ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

Exprimer  $D(p\|q)$  comme une intégrale et en déduire que  $D(p\|q) \geq 2(p - q)^2$ .

- Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$ .
- Comparer cette inégalité à celle obtenue par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

**EXERCICE 25.** ♣ - ●●●○ *Inégalités de Khintchine*

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher. On fixe  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  et on note  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k X_k$ .

- Déterminer l'espérance  $E(S_n)$  et l'écart-type  $\sigma_n$  de  $S_n$ .
- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{ch}(x) \leq \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$ .
- En déduire que pour tout  $\lambda > 0$ ,  $E(e^{\lambda S_n}) \leq \exp\left(\frac{\sigma_n^2 \lambda^2}{2}\right)$ .
- Montrer que pour tout  $\lambda > 0$  et tout  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $E(S_n^{2q}) \leq 2 \frac{(2q)!}{\lambda^{2q}} \exp\left(\frac{\sigma_n^2 \lambda^2}{2}\right)$ .
- Pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\|S_n\|_q = (E(S_n^q))^{1/q}$ . Montrer que  $\|S_n\|_{2q} \leq 2\sqrt{eq}\sigma_n$ .

## 6 Parties et fonctions aléatoires

**EXERCICE 26.** ◇ - ●●○ *Dénombrement déguisé*

On tire uniformément et indépendamment deux parties  $A$  et  $B$  de  $[[1, n]]$ . Calculer  $P(A \subset B)$  et  $E(|A \cup B|)$ .

**EXERCICE 27.** ●●○ *Fonctions aléatoires entre ensembles finis*

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls. On munit  $\mathcal{F}(\llbracket 1, m \rrbracket, \llbracket 1, n \rrbracket)$  de la probabilité uniforme.

1. Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de points de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  sans antécédent. Déterminer  $E(X)$  et  $V(X)$ .
2. Soit  $Y$  la variable aléatoire donnant le cardinal de l'image d'un élément de  $\mathcal{F}$ . Déterminer  $E(Y)$ .
3.  $m$  personnes prennent place dans un ascenseur à l'étage 0, dans un immeuble de  $n$  étages. Combien y aura-t-il d'arrêts en moyenne ?

**EXERCICE 28.** ♣/◇ – ●●○ *Maximum d'une partie aléatoire*

Soit  $r \leq n$  deux entiers non nuls, et  $A$  une partie aléatoire de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de cardinal  $r$ , tirée uniformément. On note  $X = \max A$ .

1. Déterminer la loi de  $X$ . Quelle identité combinatoire obtient-on ?
2. Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

**EXERCICE 29.** ♣ – ●●○ *Cardinal et somme d'une partie aléatoire*

Soit  $n \geq 2$ . On considère  $E$  une partie aléatoire de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , tirée uniformément. On définit, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'événement  $A_i = (i \in E)$ .

1. Déterminer la loi des indicatrices  $\mathbb{1}_{A_i}$  et montrer qu'elles sont indépendantes.
2. On définit la variable aléatoire  $N = |E|$ . Exprimer  $N$  en fonction des indicatrices  $\mathbb{1}_{A_i}$ . En déduire sa loi, son espérance et sa variance.
3. On définit la variable aléatoire  $T = \sum_{i \in E} i$ . Exprimer  $T$  en fonction des indicatrices  $\mathbb{1}_{A_i}$ . En déduire son espérance et sa variance.

## 7 Vecteurs et matrices aléatoires

**EXERCICE 30.** ♣/◇ – ●●○ *Une matrice  $2 \times 2$  est presque sûrement inversible*

On tire au sort (indépendamment et de façon équiprobable) quatre entiers  $a, b, c, d \in \llbracket -n, n \rrbracket$ . On note  $p_n$  la probabilité que  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  soit inversible. Montrer que  $p_n$  converge vers 1.

**EXERCICE 31.** ♣ – ●●○ *Déterminants aléatoires*

Soient  $(X_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher. On considère la matrice aléatoire  $M = (X_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $D = \det M$ . Calculer l'espérance et la variance de  $D$ .

**EXERCICE 32.** ●●○ *Vecteurs aléatoires*

Soient  $A \neq B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , soient  $X_1, \dots, X_p$  des variables aléatoires indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(1/2)$ . On note  $X = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_p)^T \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $P(AX = BX) \leq \frac{1}{2}$ .

**EXERCICE 33. ●●○** *Matrices aléatoires symétriques*

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(p)$ .

On pose  $U = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $M = UU^T$ .

1. Déterminer la loi de  $\text{rg}(M)$  et de  $\text{Tr}(M)$ .
2. Quelle est la probabilité pour que  $M$  soit une matrice de projection ?

**EXERCICE 34. ●●○** *Inversibilité de matrices aléatoires*

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $A_n, B_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  des matrices dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi :  $\mathcal{B}(1/2)$  pour  $A_n$  et Rademacher pour  $B_n$ . On note  $a_n$  et  $b_n$  les probabilités que  $A_n$  et  $B_n$  soient inversibles.

1. Montrer que  $a_n = b_{n+1}$ .
2. Montrer que  $a_n \geq \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ .

## 8 Permutations et graphes aléatoires

**EXERCICE 35. ♣/◇ – ●●○** *Échanges de places*

Un train contient  $n$  places numérotées et  $n$  voyageurs possèdent un billet. Le premier voyageur monte dans le train mais se place au hasard. Puis, chaque personne s'installe à sa place si elle est libre et choisit une place libre au hasard sinon.

Quelle est la probabilité que la dernière personne se trouve à sa place ?

**EXERCICE 36. ●●○** *Produit de transpositions aléatoires*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , soient  $U_1, \dots, U_n$  des variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $U_i$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, i \rrbracket$ . On pose  $\sigma_n = (1, U_1) \circ (2, U_2) \cdots \circ (n, U_n)$ , où  $(a, b)$  désigne la transposition échangeant  $a$  et  $b$ . Déterminer la loi de  $\sigma_n$ .

**EXERCICE 37. ♣ – ●●●** *Sous-groupes transitifs de  $\mathcal{S}_n$*

Un sous-groupe  $H$  de  $\mathcal{S}_n$  est dit *transitif* si  $\forall x, y \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \sigma \in H : \sigma(x) = y$ .

1. Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . À quelle condition le sous-groupe  $\langle \sigma \rangle$  engendré par  $\sigma$  est-il transitif ?
2. On considère une variable aléatoire  $X_n$  de loi uniforme sur  $\mathcal{S}_n$ .  
Calculer la probabilité  $p_n$  que le sous-groupe  $\langle X_n \rangle$  engendré par  $X_n$  soit transitif.
3. On considère deux variables aléatoires indépendantes  $X_n$  et  $Y_n$  de loi uniforme sur  $\mathcal{S}_n$ .  
On note  $q_n$  la probabilité que le sous-groupe  $\langle X_n, Y_n \rangle$  engendré par  $X_n$  et  $Y_n$  soit transitif.  
Montrer que  $q_n$  converge vers 1.

**EXERCICE 38.** ♣ – ●●●○ *Permutations aléatoires*

Soit  $n \geq 2$  un entier. On considère une permutation aléatoire  $\Sigma$ , c'est-à-dire une variable aléatoire  $\Sigma \sim \mathcal{U}(\mathcal{S}_n)$ .

1. **Images de 1 et 2. Nombre d'inversions.**

- (a) Calculer  $P(\Sigma(1) < \Sigma(2))$ .
- (b) Les variables  $\Sigma(1)$  et  $\Sigma(2)$  sont-elles indépendantes ?
- (c) Donner les lois de  $\Sigma(1)$  et  $\Sigma(2)$ , ainsi que leur loi conjointe.
- (d) Calculer la probabilité que  $\Sigma(1)$  et  $\Sigma(2)$  soient des entiers voisins.
- (e) Calculer l'espérance du nombre d'inversions de  $\Sigma$ .

2. **Points fixes.** Déterminer l'espérance et la variance du nombre de points fixes de  $\Sigma$ .

3. **Montées.** La *première montée* d'une permutation  $\sigma$  est le plus grand intervalle entier de la forme  $\llbracket 1, k \rrbracket$  sur lequel la restriction  $\sigma$  est croissante.

Déterminer la loi et l'espérance de la longueur de la première montée de  $\Sigma$ .

4. **Records.** Étant donné une permutation  $\sigma$ , on dit que  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  est un *record* pour  $\sigma$  si

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i < j \implies \sigma(i) < \sigma(j).$$

- (a) Calculer l'espérance et la variance du nombre  $R_n$  de records de  $\Sigma$ .
  - (b) Montrer que  $\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{R_n}{\ln n} - 1\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ .
5. **Cycles.** Soit  $C \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  une partie non vide. On dira pour abrégé que  $C$  est un *cycle* d'une permutation pour dire que c'est l'un des cycles de la décomposition en cycles disjoints de cette permutation.
- (a) Calculer la probabilité que  $C$  soit un cycle de  $\Sigma$ .
  - (b) Calculer la probabilité que 1 et 2 appartiennent au même cycle de  $\Sigma$ .
  - (c) Calculer la loi de la longueur du cycle de  $\Sigma$  contenant 1.

**EXERCICE 39.** ♣ – ●●●○ *Ensembles indépendants d'un graphe aléatoire*

Un *ensemble indépendant* dans un graphe est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents (de telle sorte que le graphe induit n'ait aucune arête). Le *nombre d'indépendance*  $\alpha(\Gamma)$  d'un graphe est le cardinal maximal d'un tel ensemble indépendant.

Soit  $\Gamma$  un graphe à  $n$  sommets et  $\frac{nd}{2}$  arêtes (où  $d \geq 1$ ).

On définit un ensemble aléatoire de sommets  $X$  en demandant que chaque sommet du graphe appartienne à  $X$  avec probabilité  $p$  et indépendamment des autres.

On retire ensuite (selon une procédure choisie à l'avance) à  $X$  un nombre minimal de sommets de telle sorte à obtenir un ensemble indépendant  $U \subset X$ .

- 1. Montrer que  $E(|U|) \geq np - \frac{p^2 nd}{2}$ .
- 2. Optimiser cette borne et en déduire une minoration de  $\alpha(\Gamma)$ .

**EXERCICE 40.** ♣ – ●●●○ Ensemble dominant dans un graphe aléatoire

Dans un graphe, un *ensemble dominant* est un ensemble de sommets  $U$  tel que tout sommet du graphe soit dans  $U$  ou adjacent à un sommet de  $U$ .

Soit  $\Gamma$  un graphe à  $n$  sommets et  $p \in [0, 1]$ .

On définit un ensemble aléatoire de sommets  $X$  en demandant que chaque sommet du graphe appartienne à  $X$  avec probabilité  $p$  et indépendamment des autres.

On définit alors l'ensemble  $Y$  des éléments de  $\Gamma$  qui ne sont ni dans  $X$  ni adjacents à un élément de  $X$ . Par construction, l'ensemble aléatoire  $U = X \sqcup Y$  est un ensemble dominant.

1. Déterminer  $E(|U|)$  en fonction de l'application  $d : \Gamma \rightarrow \mathbb{N}$  associant à chaque sommet son degré.
2. On pose  $\delta$  le degré minimal d'un sommet de  $\Gamma$ . Montrer que  $E(|U|) \leq n \left[ p + e^{-p(\delta+1)} \right]$ .
3. Optimiser cette borne et en déduire une majoration du cardinal minimum  $\gamma(\Gamma)$  d'un ensemble dominant de  $\Gamma$ .

## 9 Autres exercices

**EXERCICE 41.** ●○○○ Une formule pour l'espérance

Soit  $n \geq 1$ , soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que  $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$ .

**EXERCICE 42.** ♣ – ●●○○ Deux lois binomiales

On lance  $n$  fois une pièce, puis on la lance à nouveau  $n$  fois.

1. Quelle est la probabilité  $p_n$  d'avoir obtenu le même nombre de Pile ?
2. Déterminer un équivalent de  $p_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**EXERCICE 43.** ●●○○ Mode d'une loi binomiale

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .

Quelle est la valeur de  $X$  la plus probable ?

**EXERCICE 44.** ●●○○ Min et max de deux uniformes

On lance deux dés classiques équilibrés et on note  $Y$  et  $Z$  respectivement la plus petite et la plus grande valeur obtenue. Déterminer la loi de conjointe de  $Y$  et  $Z$ , les lois de  $Y$  et  $Z$  et les lois conditionnelles de  $Z$  sachant  $Y$ .

**EXERCICE 45.** ●●○○ Dé à 4 faces

On lance un dé à 4 faces,  $n$  fois de suite. On note  $p_n$  la probabilité que les 4 chiffres apparaissent au moins une fois lors des  $n$  lancers.

1. Calculer  $p_n$ , pour  $n \leq 5$ .
2. Montrer que  $p_n = \sum_{k=0}^4 (-1)^k \binom{4}{k} \frac{k^n}{4^n}$ .
3. Déterminer la limite de  $p_n$ .

**EXERCICE 46.** ♣ – ●●○ *Méthode des moindres carrés*

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles, avec  $X$  de variance strictement positive. Déterminer la droite d'approximation linéaire de  $Y$  en fonction de  $X$ , i.e. trouver deux réels  $a$  et  $b$  minimisant la quantité  $E((Y - (aX + b))^2)$ .

**EXERCICE 47.** ♣/◇ – ●●○ *Caractérisation de la loi par les moments*

Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires réelles. On suppose  $\forall k \in \mathbb{N}, E(X^k) = E(Y^k)$ . Montrer que  $X \sim Y$ .

**EXERCICE 48.** ♣ – ●●○ *Fonctions génératrices*

Si  $Z$  est une variable aléatoire à valeurs entières, on définit la fonction génératrice de  $Z$  par

$$g_Z = E(X^Z) = \sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) X^k \in \mathbb{R}[X].$$

1. Montrer que la loi de  $Z$  est entièrement déterminée par  $g_Z$ .
2. Montrer que, si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont indépendantes, alors  $g_{Z_1+Z_2} = g_{Z_1} g_{Z_2}$ .
3. Soit  $Z \sim \mathcal{B}(n, p)$ . Déterminer  $g_Z$ .
4. Retrouver grâce aux questions précédentes la loi de la somme  $Z_1 + Z_2$ , quand  $Z_1$  et  $Z_2$  sont des variables aléatoires indépendantes telles que  $Z_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$  et  $Z_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ .
5. a) Montrer que le polynôme  $P = \sum_{k=0}^{10} X^k$  ne se factorise pas dans  $\mathbb{R}[X]$  comme un produit de deux polynômes de degré 5.  
b) On lance deux dés à 6 faces et on note  $Y$  et  $Z$  les variables aléatoires des scores obtenus. On suppose  $Y$  et  $Z$  indépendantes mais on ne suppose rien sur leur loi. Montrer qu'il est impossible que  $Y + Z \sim \mathcal{U}([2, 12])$ .

**EXERCICE 49.** ●●○ *Fonction caractéristique d'une variable aléatoire*

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On note  $\phi_X$  sa fonction caractéristique, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = E(e^{itX}).$$

1. Montrer que  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et calculer, pour tout  $k \in \mathbb{N}, \phi^{(k)}(0)$ .
2. On suppose  $X$  et  $Y$  indépendantes. Calculer  $\Phi_{X+Y}$ .
3. Montrer que deux variables aléatoires ont même loi ssi elles ont même fonction caractéristique.
4. Déterminer la fonction caractéristique des variables aléatoires de lois usuelles.
5. Retrouver qu'une somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(p)$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ .

**EXERCICE 50.** ♣ – ●●○ *Variable aléatoire uniforme dans un groupe fini*

Soit  $(G, *)$  un groupe fini. Soit  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme dans  $G$ , soit  $Y$  une variable aléatoire quelconque dans  $G$ , indépendante de  $X$ . Montrer que la variable aléatoire  $Z = X * Y$  suit une loi uniforme dans  $G$ .

**EXERCICE 51.** ♣ – ●●○ *Marche aléatoire dans  $\mathbb{Z}$*

Soient  $X_1, \dots, X_n$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher. On définit  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

1. On pose  $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$ .  
Quelle est la loi de  $T_n$ ? En déduire la loi de  $S_n$ , son espérance et sa variance.
2. Trouver un équivalent de  $P(S_{2n} = 0)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
3. Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $P(|S_n| \geq n^{1/2+\varepsilon}) \rightarrow 0$ , quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
4. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $E(\exp(t \frac{S_n}{\sqrt{n}}))$  converge quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**EXERCICE 52.** ●●○ *Gros ensembles sans somme*

Une partie  $S$  d'un groupe abélien  $(A, +)$  est dite *sans somme* si  $\forall a, b \in S, a + b \notin S$ .

1. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $p = 3k + 2$  soit premier. On considère  $A \subset (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  et  $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ .  
On note  $B_0 \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  l'ensemble des classes modulo  $p$  des éléments de  $\llbracket k + 1, 2k + 1 \rrbracket$ .  
Montrer que l'ensemble  $B = A \cap (xB_0)$  est sans somme.
2. On admet qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.  
Soit  $A \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  finie non vide. Montrer qu'il existe  $B \subset A$  sans somme tel que  $|B| > \frac{|A|}{3}$ .
3. Montrer le fait admis à la question précédente.

## Indications

**Exercice 2.** La loi conjointe de  $(X, Y)$  est dans ce cas déterminée par  $P((X = 1) \cap (Y = 1))$ .

**Exercice 11.** Doit-on s'attendre à une symétrie dans le résultat ?

**Exercice 13.** Considérer les petites valeurs de  $n$  pour avoir une intuition du résultat. Puis récurrence, en pensant que  $n + 1$  est aussi égal à  $1 + n$ .

**Exercice 18.** Utiliser  $e^x \geq 1 + x$ .

**Exercice 26.** Pour le 1., cela revient à compter le nombre de couples  $(A, B)$  tels que  $A \subset B$ .

**Exercice 28.** Il est plus agréable de considérer  $P(X \leq k)$ , plutôt que  $P(X = k)$ .

**Exercice 30.** Si  $a$  est non nul et que  $a, b$  et  $c$  sont fixés, au plus une valeur de  $d$  est telle que la matrice est non inversible. En déduire une minoration de  $p_n$ .

**Exercice 35.** Une certaine symétrie dans le problème devrait rendre le résultat intuitif. C'est plus dur à formaliser...

**Exercice 47.** Que nous apprend la linéarité de l'espérance ?