

Dénombrement

1 Échauffement combinatoire

EXERCICE 1. ♣ – ●○○ *Parties de bridge*

Au bridge, une *main* est un ensemble de 13 cartes tirées dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien de mains différentes y a-t-il ?
2. Quatre joueurs reçoivent des mains. Combien y a-t-il de parties différentes ?

EXERCICE 2. ♣/◇ – ●○○ *Une erreur classique de dénombrement*

On demande à un élève de combien de façons on peut obtenir (au moins) deux valeurs identiques quand on lance 3 dés à 6 faces. Son raisonnement est le suivant : *Il y a d'abord $\binom{3}{2} = 3$ façons de choisir la paire de dés qui donneront des valeurs identiques. Cette valeur prise par les deux dés est arbitraire entre 1 et 6. Cela fait 18 possibilités. Reste à choisir la valeur du troisième dé : 6 valeurs possibles aussi. Pour un total de $18 * 6 = 108$.*

1. Quelle est l'erreur de raisonnement ?
2. Calculer la bonne valeur en comptant plus soigneusement les différents cas possibles.
3. Retrouver cette valeur en comptant les cas contraires.

EXERCICE 3. ●○○ *12 personnes autour d'une table*

12 personnes, 6 hommes et 6 femmes, sont réunis pour une soirée festive.

1. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir autour d'une table circulaire comportant 12 sièges ?
2. On identifie maintenant deux configurations si on peut passer de l'une à l'autre en déplaçant chaque personne d'un même nombre de sièges (ce qui revient à dire que seul l'ordre relatif des personnes nous intéresse). Combien y a-t-il de façons ?
3. Et si maintenant on ajoute en plus la contrainte que chaque homme ait deux voisines (ce qui implique aisément que chaque femme a deux voisins) ?

EXERCICE 4. ●○○ *Petits déjeuners copieux*

Durant n jours consécutifs, vous avez le choix entre pain au chocolat et croissant pour votre petit-déjeuner. De combien de manières pouvez-vous choisir votre viennoiserie :

1. sans aucune contrainte ?
2. en ayant pris au moins une fois chaque viennoiserie ?

3. en ayant pris autant de jours chacune des viennoiseries ?
4. en ne prenant jamais la même viennoiserie deux jours d'affilée ?
5. en ne prenant jamais la même viennoiserie trois jours d'affilée ?

EXERCICE 5. ●○○ *Involutions et points fixes*

Une involution d'un ensemble E est une permutation $\sigma : E \rightarrow E$ telle que $\sigma \circ \sigma = \text{Id}_E$.
Montrer qu'une involution d'un ensemble fini de cardinal impair a un point fixe.

EXERCICE 6. ♣ – ●○○ *Couples d'ensembles*

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

1. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E ?
2. Combien de ces couples vérifient $A \subset B$?
3. Combien vérifient $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$?
4. Combien vérifient $A \cup B = E$?

2 Interprétation combinatoire de formules

EXERCICE 7. ●○○ *Somme des coefficients binomiaux sur une colonne*

Soient $p, n \in \mathbb{N}$. On note E l'ensemble des nombres à n chiffres avec p chiffres 1 et $n - p$ chiffres 2.

1. Quel est le cardinal de E ?
2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Quel est le cardinal de E_k , ensemble des nombres dans E dont le dernier 1 est en position k ?
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

EXERCICE 8. ♣ – ●●○ *Fibonacci n'aimait pas que les lapins*

Une grenouille monte un escalier de $n \geq 1$ marches, par des sauts successifs de 1 ou 2 marches. On note F_n le nombre de façons différentes d'effectuer l'ascension.

1. Montrer que $(F_n)_{n \geq 1}$ est la suite de Fibonacci, définie par $F_1 = 1, F_2 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

2. Soit $k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket$. Dénombrer le nombres d'ascensions possibles comportant (exactement) k sauts de 2 marches.
3. En déduire la formule : $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_n$. Interprétation graphique ?

EXERCICE 9. $\diamond - \bullet\bullet\circ$ *Parties de cardinal pair et impair*

Montrer sans calcul qu'un ensemble fini non vide a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

EXERCICE 10. $\clubsuit - \bullet\bullet\circ$ *Des chefs et des sous-chefs*

Soient $k \leq n$ deux entiers naturels. Montrer de façon combinatoire :

$$\binom{n}{k} 2^k = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}.$$

EXERCICE 11. $\clubsuit/\diamond - \bullet\bullet\bullet$ *Stars and bars*

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Donner une démonstration combinatoire de

$$\sum_{\substack{(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p \\ i_1 + \dots + i_p = n}} i_1 i_2 \dots i_p = \binom{n+p-1}{2p-1}.$$

3 Principe des tiroirs

EXERCICE 12. $\clubsuit/\diamond - \bullet\bullet\circ$ *Principe des tiroirs*

1. On place 4 points sur un cercle de rayon 1. Montrer qu'on peut en sélectionner deux à distance inférieure ou égale à $\sqrt{2}$.
2. On place 51 points dans un carré plein de côté 1. Montrer qu'on peut en sélectionner trois tels que la distance entre deux de ces points est inférieure ou égale à $2/7$.
3. On considère $n+1$ entiers compris entre 1 et $2n$. Montrer que l'un de ces entiers en divise un autre.
4. Retrouver le résultat de la question précédente par une récurrence.

EXERCICE 13. $\bullet\bullet\circ$ *Deux applications du principe des tiroirs*

1. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que si x_1, \dots, x_n sont des entiers, on peut trouver $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ non vide tel que $\sum_{i=1}^n x_i$ est un multiple de n .
2. Soit \mathcal{R} une relation symétrique et anti-réflexive (aucun x ne vérifie $x \mathcal{R} x$) sur un ensemble fini E . Montrer qu'il existe $x \neq y$ dans E tels que

$$\left| \{z \in E, x \mathcal{R} z\} \right| = \left| \{z \in E, y \mathcal{R} z\} \right|.$$

Montrer qu'on ne peut pas supprimer l'hypothèse d'anti-réflexivité.

EXERCICE 14. $\clubsuit/\diamond - \bullet\bullet\bullet$ *Théorème d'Erdős-Szekeres*

Soient $r, s \in \mathbb{N}$. Montrer que toute suite d'au moins $(r-1)(s-1)+1$ nombres réels contient une sous-suite croissante de longueur r ou une sous-suite décroissante de longueur s .

4 Autres exercices

EXERCICE 15. ●○○ *Nombres de relations*

Soit E un ensemble de cardinal n . Combien y a-t-il de relations binaires sur E ? de relations réflexives ? de relations symétriques ?

EXERCICE 16. ◇ – ●○○ *Partitions régulières*

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble de cardinal np . Déterminer le nombre de partitions de E en n parties de cardinal p .

EXERCICE 17. ●○○ *Listes à somme fixée*

On note a_n le nombre de listes d'entiers naturels non nuls de somme égale à n .

1. Calculer a_1, a_2, a_3 .
2. Démontrer de façon combinatoire la formule $a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^n a_i$.
3. En déduire a_n .

EXERCICE 18. ●●○ *Somme de cardinaux*

Soit E un ensemble à n éléments ; calculer $\sum_{X \in E} |X|$, puis $\sum_{X, Y \in E} |X \cap Y|$.

EXERCICE 19. ●●○ *Nombres de Bell*

Soit n un entier naturel. Le n -ème *nombre de Bell* B_n est défini comme le nombre de partitions d'un ensemble E à n éléments.

1. Donner toutes les partitions possibles d'un ensemble à 0, 1, 2 ou 3 éléments.
En déduire B_n , pour $n \in [0, 3]$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$.

EXERCICE 20. ♣/◇ – ●●○ *Nombre d'involutions*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n le nombre d'involutions de $[1, n]$. Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite (I_n) .

EXERCICE 21. ●●○ *Une partie dans une partie dans une partie*

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Déterminer le cardinal de

$$\{(X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3 \mid X \subset Y \subset Z\}.$$

EXERCICE 22. ◇ – ●●○ *Applications (strictement) croissantes*

1. Soient $k \leq n$ deux entiers naturels. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[1, k]$ dans $[1, n]$?
2. Soient $k, n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il y a autant d'applications croissantes de $[1, k]$ dans $[1, n]$, que d'applications strictement croissantes de $[1, k]$ dans $[1, n + k - 1]$. En déduire le nombre d'applications croissantes de $[1, k]$ dans $[1, n]$.

EXERCICE 23. ●●○ *Parties sans entiers consécutifs*

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n/2$. Combien y a-t-il de parties de cardinal p dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, sans entiers consécutifs ?

EXERCICE 24. ♣ – ●●○ *Des parties discriminantes*

Soit E un ensemble de cardinal n et A_1, \dots, A_m des parties de E vérifiant :

$$\forall x, y \in E, x \neq y \implies \exists i \in \llbracket 1, m \rrbracket : (x \in A_i \text{ et } y \notin A_i) \text{ ou } (x \notin A_i \text{ et } y \in A_i).$$

Montrer que $m \geq \log_2(n)$.

EXERCICE 25. ♣ – ●●○ *Théorème de Sperner sur les antichaînes*

On appelle antichaîne de $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ une partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ vérifiant :

$$\forall X, Y \in \mathcal{A}, X \neq Y \implies X \not\subset Y.$$

1. Montrer qu'il existe une antichaîne de cardinal $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.
2. On souhaite montrer qu'il s'agit en fait du cardinal maximal d'une antichaîne.
 - (a) On appelle chaîne complète de $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ une partie $\{C_0, \dots, C_n\} \subset \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ telle que $C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq \dots \subsetneq C_n$.
Combien y a-t-il de chaînes complètes ? Combien y en a-t-il comprenant une partie $X \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ fixée, de cardinal k ?
 - (b) En déduire que si \mathcal{A} est une antichaîne : $\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n - |A|)! \leq n!$
 - (c) Montrer que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est maximal pour $k = \lfloor n/2 \rfloor$.
 - (d) Conclure.

EXERCICE 26. ♣/◇ – ●●○ *Nombres de Catalan*

Soient (a, b) et (c, d) deux points du plan, à coordonnées entières. On suppose $a \leq c$ et $b \leq d$. On appelle chemin vers le nord-est de (a, b) vers (c, d) une liste de points $((x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N))$ telle que $(a, b) = (x_0, y_0)$, $(c, d) = (x_N, y_N)$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, (x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k + 1) \text{ ou } (x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k + 1, y_k).$$

1. Quelle est la valeur de N dans la définition précédente ? Combien y a-t-il de chemins vers le nord-est de (a, b) vers (c, d) ?

On considère désormais les chemins vers le nord-est de $(0, 0)$ vers (n, n) (où $n \in \mathbb{N}$) tels que chaque point (x_k, y_k) du chemin vérifie $y_k \leq x_k$. On note C_n le nombre de tels chemins : c'est le n -ème nombre de Catalan.

2. Soient $a > b$ deux entiers naturels. Montrer qu'il y a autant de chemins vers le nord-est de $(1, 0)$ vers (a, b) touchant la diagonale $(x = y)$ que de chemins vers le nord-est de $(0, 1)$ vers (a, b) .

3. En déduire que le nombre de chemins vers le nord-est de $(1, 0)$ vers (a, b) ne touchant pas la diagonale est $\frac{a-b}{a+b} \binom{a+b}{a}$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.
5. Montrer à partir de la définition que $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$.

EXERCICE 27. ♣ – ●●○ Régions dans un cercle

Soit \mathcal{C} un cercle. On place n points distincts sur le cercle et on trace toutes les cordes reliant deux de ces points. On suppose que la situation est générique : trois cordes ne sont jamais concourantes. On cherche à déterminer le nombre R_n de régions délimitées par les cordes.

1. Déterminer R_n , pour $n \leq 4$. Quelle conjecture pouvez-vous émettre ?
2. Quel est le nombre C_n de cordes ?
3. Quel est le nombre I_n de points d'intersection (à l'intérieur du cercle) entre cordes ?
4. On admet la formule d'Euler $R_n = 1 + L_n + I_n$. En déduire R_n .
5. Que valent R_5 et R_6 ? Quelle morale en tirer ?

Indications

Exercice 2. Soyez attentif à l'usage de l'article défini.

Exercice 9. Fixer un élément. Considérer l'application ajoutant/ôtant cet élément à une partie.

Exercice 11. Un p -uplet d'entiers naturels de somme n peut être représenté par la succession de $n + p - 1$ symboles : n étoiles et $p - 1$ barres verticales.

Exercice 12. Pour 1., montrer qu'on peut trouver 3 points sur un même demi-cercle, puis 2 points sur un même quart de cercle. Pour 2., $51 = 2 \times 5^2 + 1$.

Exercice 14. Associer à chaque terme x_k de la suite le couple (a_k, b_k) où a_k (resp. b_k) est défini comme la longueur maximale d'une sous-suite croissante (resp. décroissante) terminant en x_k . Puis montrer que tous ces couples sont distincts.

Exercice 16. Attention à ne pas compter plusieurs fois les mêmes configurations !

Exercice 20. Fixer un élément et distinguer selon qu'il est égal ou pas à son image par une involution.

Exercice 22. Pour 2., décaler progressivement les images vers la droite.

Exercice 26. Pour 2., si un chemin de $(0, 0)$ vers (a, b) touche la diagonale, considérer le dernier point d'intersection (avant (n, n)) et faire la réflexion du chemin partiel entre $(0, 0)$ et ce point d'intersection.

Pour 5., distinguer selon le dernier point d'intersection (avant (n, n)) d'un chemin avec la diagonale.