

## DS 9 de mathématiques

## 1 Exercice – Loi du nombre de désintégrations

- Par définition,  $N_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}$ . Comme  $\mathbb{1}_{A_k}$  vaut 1 avec probabilité  $p_n$  et 0 sinon, on a  $\mathbb{1}_{A_k} \sim \mathcal{B}(p_n)$ . En particulier,  $E[\mathbb{1}_{A_k}] = p_n$ . Par linéarité de l'espérance,  $\lambda = E[N_n] = np_n$ , de sorte que  $p_n = \frac{\lambda}{n}$ .
- Comme les  $A_k$  sont supposés indépendants, les variables aléatoires  $\mathbb{1}_{A_k}$  le sont aussi. Ainsi,  $N$  est une somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes suivant la loi  $\mathcal{B}(p_n)$  ; donc  $N \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ . D'après le cours,  $V[N] = np_n(1 - p_n)$ .
- Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$P(N_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Comme  $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ ,  $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ . De plus,  $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \rightarrow 1$  et  $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}$ . Finalement, on obtient bien que

$$P(N = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(N_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

- On note  $u_k = P(N = k)$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . On a  $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\lambda}{k+1}$ .  
Donc,  $u_{k+1} > u_k \iff \lambda > k+1$  et  $u_{k+1} < u_k \iff \lambda < k+1$ . On distingue alors deux cas :
  - Si  $\lambda \in \mathbb{N}$ ,  $(u_k)$  est strictement croissante jusqu'à l'indice  $\lambda - 1$ ,  $u_{\lambda-1} = u_\lambda$  et  $(u_k)$  est strictement décroissante à partir de l'indice  $\lambda$ . Les modes de  $N$  sont donc  $\lambda - 1$  et  $\lambda$ .
  - Si  $\lambda \notin \mathbb{N}$ ,  $(u_k)$  est strictement croissante jusqu'à l'indice  $[\lambda]$ , puis elle est strictement décroissante. Le mode de  $N$  est donc  $[\lambda]$ .

## 2 Problème – Un calcul d'intégrales

1. Par définition,  $Z$  est l'ensemble des racines  $n$ -èmes de  $-1$ , privé de  $-1$ . Donc,

$$Z = \left\{ e^{i(2k+1)\frac{\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \setminus \frac{n-1}{2} \right\}.$$

On a donc  $Z_+ = \left\{ e^{i(2k+1)\frac{\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, \frac{n-3}{2} \rrbracket \right\}$ . Comme  $Z$  est stable par conjugaison complexe,  $Z_+ \cup Z_- \subset Z$ . De plus,  $Z_+$  et  $Z_-$  sont disjoints, donc le cardinal de leur union est  $2|Z_+| = n-1 = |Z|$ . Il y a donc égalité.

2. La fraction rationnelle  $\frac{1}{X^n+1}$  a un degré strictement négatif et le dénominateur se factorise en  $(X+1) \prod_{\omega \in Z} (X-\omega)$ . L'existence des nombres  $\alpha_{-1}$  et  $\alpha_\omega$  s'obtient directement par décomposition en éléments simples.

Si  $\omega \in Z \cup \{-1\}$ ,  $\alpha_\omega$  s'obtient en évaluant en  $\omega$  la fraction rationnelle  $\frac{X-\omega}{X^n+1}$ . En notant  $Q$  le polynôme tel que  $X^n+1 = (X-\omega)Q$ , on a  $nX^{n-1} = Q + (X-\omega)Q'$  et donc  $Q(\omega) = n\omega^{n-1} = -\frac{n}{\omega}$ . Ainsi,  $\alpha_\omega = -\frac{\omega}{n}$ .

3. On multiplie l'inégalité par  $n$  et on évalue en  $x \in \mathbb{R}_+$  :

$$\frac{n}{x^n+1} = \frac{1}{x+1} - \sum_{\omega \in Z} \frac{\omega}{x-\omega}.$$

Comme  $Z = Z_+ \cup Z_-$ , on peut réécrire la deuxième somme ainsi :

$$\sum_{\omega \in Z} \frac{\omega}{x-\omega} = \sum_{\omega \in Z_+} \frac{\omega}{x-\omega} + \frac{\bar{\omega}}{x-\bar{\omega}} = \sum_{\omega \in Z_+} 2\operatorname{Re} \left( \frac{\omega}{x-\omega} \right).$$

D'où l'égalité annoncée.

4. Soit  $\omega \in Z_+$ . On a

$$\frac{\omega}{x-\omega} = \frac{\omega(x-\bar{\omega})}{|x-\omega|^2} = \frac{\omega x - 1}{|x-\omega|^2}.$$

Le dénominateur est réel et donc  $\operatorname{Re} \left( \frac{\omega}{x-\omega} \right) = \frac{c_\omega x - 1}{|x-\omega|^2} = \frac{c_\omega(x-c_\omega) + c_\omega^2 - 1}{x^2 - 2xc_\omega + 1}$ . On conclut en remarquant que  $c_\omega^2 - 1 = -s_\omega^2$  (car  $|\omega| = 1$ ) et  $x^2 - 2xc_\omega + 1 = (x-c_\omega)^2 + s_\omega^2$ .

5. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a donc :

$$\frac{1}{x^n+1} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{x+1} - 2 \sum_{\omega \in Z_+} \left( c_\omega \frac{x-c_\omega}{x^2-2xc_\omega+1} - s_\omega \frac{s_\omega}{(x-c_\omega)^2+s_\omega^2} \right) \right).$$

On connaît une primitive élémentaire de chaque terme, donc une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x^n+1}$  est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{n} \left( \ln(x+1) - \sum_{\omega \in Z_+} c_\omega \ln(x^2 - 2xc_\omega + 1) + \sum_{\omega \in Z_+} 2s_\omega \arctan \left( \frac{x-c_\omega}{s_\omega} \right) \right).$$

6. (a) Comme  $X^n + 1$  a un coefficient nul devant  $X^{n-1}$ , la somme de ses racines est nulle (relations de Viète). Donc,  $-1 + \sum_{\omega \in Z} \omega = 0$ . Comme  $Z = Z_+ \cup Z_-$  et que  $\omega + \bar{\omega} = 2c_\omega$ , on en déduit que  $-1 + 2 \sum_{\omega \in Z_+} 2c_\omega = 0$ .

(b) Soit  $\omega \in Z_+$ . Par définition,  $c_\omega = \cos(\theta_\omega)$  et  $s_\omega = \sin(\theta_\omega)$ . On a donc aussi  $c_\omega = \sin(\pi/2 - \theta_\omega)$  et  $s_\omega = \cos(\pi/2 - \theta_\omega)$ . Donc,

$$\arctan\left(-\frac{c_\omega}{s_\omega}\right) = -\arctan\left(\frac{\sin(\pi/2 - \theta_\omega)}{\cos(\pi/2 - \theta_\omega)}\right) = -\arctan(\tan(\pi/2 - \theta_\omega)) = -(\pi/2 - \theta_\omega) = \theta_\omega - \frac{\pi}{2}.$$

On a pu simplifier  $\arctan(\tan(\pi/2 - \theta_\omega))$  car  $\theta_\omega \in ]0, \pi[$  et donc  $\pi/2 - \theta_\omega \in ]-\pi/2, \pi/2[$ .

(c) On écrit  $F(x) = \frac{1}{n}(L(x) + A(x))$ , où  $L$  est la somme des termes en  $\ln$  et  $A$  celle en  $\arctan$ . On a  $L(0) = 0$  et, si  $R \in \mathbb{R}_+$ ,

$$L(R) = \ln(R+1) - \sum_{\omega \in Z_+} c_\omega \ln(R^2 - 2Rc_\omega + 1) = \ln\left(\frac{R+1}{\prod_{\omega \in Z_+} (R^2 - 2Rc_\omega + 1)^{c_\omega}}\right).$$

Le terme à l'intérieur du  $\ln$  est équivalent, quand  $R \rightarrow +\infty$ , à  $R^{1 - \sum_{\omega \in Z_+} 2c_\omega} = 1$  (Q 6.a). Ainsi,  $L(R) \rightarrow 0$ , quand  $R \rightarrow +\infty$ .

Par ailleurs,  $A(R) - A(0) = 2 \sum_{\omega \in Z_+} s_\omega \arctan\left(\frac{R - c_\omega}{s_\omega}\right) - s_\omega \arctan\left(-\frac{c_\omega}{s_\omega}\right)$ . Quand  $R \rightarrow +\infty$ , ceci converge (on utilise Q 6.b) vers

$$2 \sum_{\omega \in Z_+} s_\omega \frac{\pi}{2} - s_\omega(\theta_\omega - \pi/2) = 2 \sum_{\omega \in Z_+} s_\omega(\pi - \theta_\omega).$$

$$\text{Finalement, } I_n = \frac{2}{n} \sum_{\omega \in Z_+} s_\omega(\pi - \theta_\omega).$$

Pour le calcul final, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^m k \sin(kx) = \frac{(m+1) \sin(mx) - m \sin(m+1)x}{4 \sin^2(x/2)}.$$

7. Les  $\pi - \theta_\omega$ , pour  $\omega \in Z_+$  sont les  $\pi - \pi/n, \pi - 3\pi/n, \dots$  jusqu'à  $\pi - (\pi - 2\pi/n) = 2\pi/n$ . Après changement de variable, on a donc, avec  $m = \frac{n-1}{2}$  :

$$I_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^m \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \frac{2k\pi}{n} = \frac{4\pi}{n^2} \sum_{k=1}^m k \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

En utilisant la formule de l'énoncé, la somme vaut

$$\frac{\frac{n+1}{2} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) - \frac{n-1}{2} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{n}\right)}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{n}{4 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

$$\text{Finalement, } I_n = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

### 3 Problème – Sur la décomposition LU

#### 3.1 Décomposition LU

1. (a) On calcule  $LU$  par blocs :

$$LU = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}U_{11} & L_{11}U_{12} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $M_{11} = L_{11}U_{11}$  ; comme  $L_{11}$  est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et que  $U_{11}$  est triangulaire supérieure, l'unicité de la décomposition LU en dimension  $n-1$  ( $M_{11}$  est bien régulière) nous apprend que  $(L_{11}, U_{11})$  est uniquement déterminé par  $M_{11}$ , donc par  $M$ .

- (b) Avec l'égalité précédente, on a en particulier  $\det(M_{11}) = \det(L_{11})\det(U_{11})$ . Comme  $\det(M_{11}) \neq 0$ ,  $L_{11}$  et  $U_{11}$  sont inversibles.

Par le calcul précédent,  $L_{11}U_{12} = M_{12}$  et  $L_{21}U_{11} = M_{21}$ , donc  $U_{12} = L_{11}^{-1}M_{12}$  et  $L_{21} = M_{21}U_{11}^{-1}$ .

Il reste à considérer les coefficients  $L_{22}$  et  $U_{22}$ . D'abord,  $L_{22} = 1$  car  $L$  a des coefficients 1 sur la diagonale. Toujours par le calcul précédent, on a  $L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} = M_{22}$ . Tout est connu sauf  $U_{22}$ , ainsi  $U_{22}$  est aussi déterminé par  $M$ .

Finalement, on a unicité du couple  $(L, U)$  dans une décomposition  $LU$  de  $M$ .

- (c) Pour montrer l'existence, il suffit de reprendre les calculs précédents :

- Comme  $M_{11}$  est régulière, on peut en trouver une décomposition  $LU$  :  $M_{11} = L_{11}U_{11}$ . En particulier,  $L_{11}$  et  $U_{11}$  sont inversibles.
- On pose  $U_{12} = L_{11}^{-1}M_{12}$ ,  $L_{21} = M_{21}U_{11}^{-1}$ ,  $L_{22} = 1$  et  $U_{22} = M_{22} - L_{21}U_{12}$ . Le calcul par blocs de la question 3.a) donne alors  $LU = M$  ; de plus,  $L$  et  $U$  ont les propriétés demandées.

2. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Notons  $L_{kk}$ ,  $U_{kk}$  et  $M_{kk}$  les matrices extraites de  $L$ ,  $U$  et  $M$  en gardant les  $k$  premières lignes et colonnes. Un calcul par blocs analogue au précédent donne  $L_{kk}U_{kk} = M_{kk}$ . Donc,  $\det(L_{kk})\det(U_{kk}) = \det(M_{kk}) = d_k(M)$ . Comme  $L_{kk}$  a des coefficients diagonaux égaux à 1,  $\det(L_{kk}) = 1$ . En notant  $u_1, \dots, u_n$  les coefficients diagonaux de  $U$  (dans cet ordre), on a donc  $u_1 u_2 \dots u_k = d_k(M)$ .

Ainsi, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u_k = \frac{d_k(M)}{d_{k-1}(M)}$ , en convenant que  $d_0(M) = 1$ .

#### 3.2 Réduction à une matrice régulière

On cherche à montrer que toute matrice  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  est semblable à une matrice régulière.

3. (a) Si pour tout  $X \in \mathbb{K}^n$ ,  $X$  et  $MX$  sont colinéaires, alors tout  $X$  est vecteur propre de  $M$ . En particulier, il existe une base de vecteurs propres de  $M$ . Si toutes les valeurs propres associées étaient les mêmes,  $M$  serait scalaire, ce qui est exclu. Donc, on peut trouver deux vecteurs  $X$  et  $Y$  non nuls tels que  $MX = \alpha X$  et  $MY = \beta Y$ , avec  $\alpha \neq \beta$ . Alors,  $M(X + Y) = \alpha X + \beta Y$ . Comme  $X$  et  $Y$  forment une famille libre,  $M(X + Y)$  et  $X + Y$  ne sont pas colinéaires.
- (b) On prend un  $X$  comme dans la question précédente et on considère une base de  $\mathbb{K}^n$  avec  $X$  en premier vecteur et  $MX$  en dernier vecteur ; c'est possible par liberté

de  $(X, MX)$  et par théorème de la base incomplète. Par construction, la matrice représentant  $M$  dans cette nouvelle base a la forme demandée.

4. (a) On vérifie immédiatement par un calcul par blocs que  $P_U \times P_{-U} = I_n$ . Donc,  $P_U$  est inversible d'inverse  $P_{-U}$ .
- (b) La première colonne de  $M_{11}$  est nulle par hypothèse. Donc, le rang de  $M_{11}$  est le rang de la famille des colonnes d'indice  $2, \dots, n-1$  de  $M_{11}$ . Quand on ajoute une colonne à une matrice, le rang ne peut augmenter que de 1 ; c'est aussi vrai quand on ajoute une ligne en raisonnant sur la transposée.  
Comme  $M$  peut être vue comme obtenue à partir de  $M_{11}$  en ajoutant d'abord une colonne à la fin, puis une ligne à la fin, on a  $\text{rg } M \leq \text{rg } M_{11} + 2$ . Comme  $M$  est inversible, cela donne  $\text{rg } M_{11} \geq n - 2$ . Il y a en fait égalité puisque l'image de  $M_{11}$  est engendré par les colonnes d'indice de 2 à  $n-1$  ; donc ces colonnes forment une famille libre.
- (c) Un calcul par blocs (à écrire sur la copie) montre que  $M'_{11} = M_{11} + UM_{21}$ . Notons  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  les colonnes de  $M'_{11}$  (avec  $C_1 = 0$ ) et  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  (avec  $\alpha_1 = 1$ ) les coefficients de la ligne  $M_{21}$ . Alors,  $M'_{11}$  a pour colonnes  $\alpha_1 U, C_2 + \alpha_2 U, \dots, C_{n-1} + \alpha_{n-1} U$ . Donc,

$$\det(M'_{11}) = \det(U, C_2 + \alpha_2 U, \dots, C_{n-1} + \alpha_{n-1} U) = \det(U, C_2, \dots, C_{n-1})$$

en utilisant le caractère multilinéaire alterné du déterminant. Comme la famille  $(C_2, \dots, C_{n-1})$  est libre, on peut trouver  $U$  tel que  $(U, C_2, \dots, C_{n-1})$  forme une base de  $\mathbb{K}^{n-1}$ . Alors,  $M'_{11}$  est inversible.

5. On procède par récurrence sur  $n$  pour montrer que toute matrice de  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  est semblable à une matrice régulière. Le cas  $n = 1$  est évident.

Supposons le résultat montré pour  $n - 1$ , avec  $n \geq 2$  et soit  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Si  $M$  est scalaire, elle est régulière et il n'y a rien à faire. Sinon,  $M$  est semblable par la Q3 à une matrice de première colonne  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)^T$ , qu'on note  $M_2$ . En considérant un  $U$  comme dans la question précédente,  $M_2$  est elle-même semblable à une matrice  $M'$  dont le bloc  $M'_{11}$  de taille  $n - 1$  supérieur gauche est inversible. En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $M'_{11}$ , on peut trouver  $Q \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$  tel que  $Q^{-1}M'_{11}Q$  est régulière. On note alors  $\tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . La matrice  $\tilde{Q}M'\tilde{Q}^{-1}$  a comme bloc supérieur gauche de taille  $n - 1$  la matrice  $Q^{-1}M'_{11}Q$  ; donc  $\tilde{Q}M'\tilde{Q}^{-1}$  est régulière.

Finalement,  $M$  est semblable à une matrice  $M_1$ , semblable à une matrice  $M'$ , semblable à  $\tilde{Q}M'\tilde{Q}^{-1}$ , qui est régulière. Donc,  $M$  est semblable à une matrice régulière.

### 3.3 Une application

6. Comme  $M$  est régulière, elle admet une décomposition  $LU$  : on écrit  $M = LU$ . Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des éléments de  $\mathbb{K}$  non nuls et deux à deux distincts ; notons  $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et écrivons  $M = (LD)(D^{-1}U)$ . Alors,  $A = LD$  est triangulaire inférieure,  $B = D^{-1}U$  est triangulaire supérieure et  $M = AB$ . De plus, les coefficients de  $A$  sont les  $\alpha_i$ , par hypothèse deux à deux distincts.  
En notant  $u_1, \dots, u_n$  les coefficients diagonaux de  $U$ , les coefficients diagonaux de  $B$

sont les  $\frac{u_i}{\alpha_i}$ . Si deux de ces coefficients sont égaux, on a deux indices  $i < j$  tels que  $\frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \frac{u_i}{u_j}$ . Mais on peut s'arranger pour que ces égalités n'arrivent pas en choisissant convenablement les  $\alpha_i$  : on prend  $\alpha_1$  quelconque (p. ex. 1), puis  $\alpha_2$  différent de  $\alpha_1$  et tel que  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{u_1}{u_2}$ , puis  $\alpha_3$  différent de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  et tel que  $\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \neq \frac{u_1}{u_3}$  et  $\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \neq \frac{u_2}{u_3}$ , etc. A chaque étape, il y a un nombre fini de valeurs de  $\alpha_i$  à éviter et  $\mathbb{K}$  est infini, ce qui conclut.

7. Notons  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  les coefficients diagonaux (deux à deux distincts) de  $A$ . Pour tout  $x \in \mathbb{K}$ ,  $xI_n - A$  est triangulaire inférieure, avec coefficients  $x - \alpha_i$  sur la diagonale. Donc,  $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$ , pour tout  $x \in \mathbb{K}$ . Comme  $\mathbb{K}$  est infini, on a  $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ . Ainsi, tous les  $\alpha_i$  sont des valeurs propres de  $A$ . En notant  $X_1, \dots, X_n$  des vecteurs propres correspondants, les  $X_i$  forment une famille libre de  $\mathbb{K}^n$ , donc une base de vecteurs propres de  $A$ . Donc,  $A$  est diagonalisable.

Le raisonnement est identique pour  $B$ .

8. Les deux questions précédentes montrent que toute matrice régulière de  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  est produit de deux matrices diagonalisables.

Considérons  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Par la partie précédente, il existe  $N$  régulière et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $M = P^{-1}NP$ . On écrit  $N = AB$  avec  $A$  et  $B$  diagonalisables ; alors  $M = (P^{-1}AP)(P^{-1}BP)$ . Les deux matrices entre parenthèses sont semblables à des matrices diagonalisables, donc sont diagonalisables. Ce qui conclut.

## 4 Problème – Longueur maximale d'une suite extraite croissante

### 4.1 Majoration de $E(C_n)$

1. En énumérant tous les cas (*à écrire sur la copie*), on trouve :

- Pour  $n = 2$ ,  $P(C_2 = 1) = P(C_2 = 2) = 1/2$ . Donc,  $E(C_2) = 3/2$ .
- Pour  $n = 3$ ,  $P(C_3 = 1) = P(C_3 = 3) = 1/6$  et  $P(C_3 = 2) = 2/3$ . Donc,  $E(C_3) = 1/6 + 4/3 + 3/6 = 2$ .
- Pour  $n = 3$ ,  $P(C_4 = 1) = P(C_4 = 4) = 1/24$  ;  $P(C_4 = 2) = 13/24$  ;  $P(C_4 = 3) = 9/24$ . Donc,  $E(C_4) = 29/12$ .

2. On dénombre les éléments de  $A^s$ . Une permutation de  $A^s$  est décrite par

- L'ensemble des valeurs  $\sigma(\{i_1, \dots, i_k\})$  : il y a  $\binom{n}{k}$  possibilités et, pour chacune,  $\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)$  sont déterminés puis qu'on veut  $\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)$  ;
- L'image des  $n - k$  autres éléments à choisir parmi les  $n - k$  restants ; il y a  $(n - k)!$  possibilités.

$$\text{Ainsi, } P(A^s) = \frac{|A^s|}{n!} = \frac{\binom{n}{k}(n - k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

3. Par définition,  $(C_n \geq k)$  est l'union des évènements  $A^s$ , pour  $s$  décrivant l'ensemble des  $k$ -uplets strictement croissants d'entiers dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Il y a  $\binom{n}{k}$  tels  $s$  et donc  $(C_n \geq k)$  est l'union de  $\binom{n}{k}$  évènements de même probabilité  $\frac{1}{k!}$ . D'où la majoration

$$P(C_n \geq k) \leq \frac{\binom{n}{k}}{k!}.$$

On utilise que la probabilité d'une union d'évènements est inférieure à la somme de leur probabilité, ce qu'on montre par une récurrence immédiate.

4. Comme  $C_n$  est entier, les évènements  $(C_n \geq \alpha e\sqrt{n})$  et  $(C_n \geq k)$  sont égaux. Par la question précédente, on a

$$P(C_n \geq \alpha e\sqrt{n}) \leq \frac{\binom{n}{k}}{k!} \leq \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k!)^2}.$$

On peut majorer chaque facteur du numérateur par  $n$  et on obtient bien

$$P(C_n \geq \alpha e\sqrt{n}) \leq \frac{n^k}{(k!)^2}.$$

5. On sait que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$ . En particulier, si  $x = k$ , tous les termes sont

$$\text{positifs, et donc } e^k \geq \frac{k^k}{k!}.$$

On a donc  $P(C_n \geq \alpha e\sqrt{n}) \leq \frac{n^k}{(k!)^2} \leq n^k \left(\frac{e}{k}\right)^{2k} = \left(\frac{e\sqrt{n}}{k}\right)^{2k}$ . Comme  $k = \lceil \alpha e\sqrt{n} \rceil$ ,  $k \geq \alpha e\sqrt{n}$  et donc,  $\frac{e\sqrt{n}}{k} \leq \frac{1}{\alpha}$ . D'où,

$$P(C_n \geq \alpha e\sqrt{n}) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2k} \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}},$$

la dernière inégalité venant de ce que  $k \geq \alpha e\sqrt{n}$  et que  $\frac{1}{\alpha} < 1$ .

6. On décompose  $C_n = C_n \mathbb{1}_{C_n < \alpha e\sqrt{n}} + C_n \mathbb{1}_{C_n \geq \alpha e\sqrt{n}}$ . Par linéarité de l'espérance, on a

$$E(C_n) = E(C_n \mathbb{1}_{C_n < \alpha e\sqrt{n}}) + E(C_n \mathbb{1}_{C_n \geq \alpha e\sqrt{n}}).$$

Pour le premier terme, on a la majoration  $C_n \mathbb{1}_{C_n < \alpha e\sqrt{n}} \leq \alpha e\sqrt{n} \mathbb{1}_{C_n < \alpha e\sqrt{n}} \leq \alpha e\sqrt{n}$  et donc, par croissance de l'espérance,  $E(C_n \mathbb{1}_{C_n < \alpha e\sqrt{n}}) \leq \alpha e\sqrt{n}$ .

Pour le deuxième terme, on majore  $C_n$  par  $n$ .

$$\text{On a donc } E(C_n \mathbb{1}_{C_n \geq \alpha e\sqrt{n}}) \leq n P(C_n \geq \alpha e\sqrt{n}) \leq n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}.$$

On somme les inégalités et on divise par  $\sqrt{n}$  pour conclure.

7. On va chercher à optimiser l'inégalité précédente en considérant une bonne valeur (dépendant de  $n$ ) pour  $\alpha$ . Le terme  $e$  dans l'inégalité à obtenir suggère de prendre une valeur de  $\alpha$  tendant vers 1 (prendre  $\alpha = 1$ ) donne une estimation trop grossière sur la deuxième

terme.

On fixe  $\beta > 0$  et on pose  $\alpha_n = 1 + n^{-\beta}$ . On a

$$\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{2\alpha_n e\sqrt{n}} = \exp\left(-2(1 + n^{-\beta})e\sqrt{n} \ln(1 + n^{-\beta})\right).$$

Le terme dans l'exponentielle est équivalent à  $-2en^{1/2-\beta}$ . Donc, si  $\beta \in ]0, 1/2[$  (p. ex  $\beta = 1/4$ )

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{2\alpha_n e\sqrt{n}} = \exp(-2en^{1/2-\beta} + 2 \ln n + o(n^{1/2-\beta})) = \exp(-2en^{1/2-\beta} + o(n^{1/2-\beta}))$$

Ceci montre que  $\sqrt{n} \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{2\alpha_n e\sqrt{n}}$  tend vers 0 pour cette valeur de  $\beta$ . Comme on a

$$\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leq (1 + n^{-\beta})e + \sqrt{n} \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{2\alpha_n e\sqrt{n}},$$

on a bien  $\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leq e + \varepsilon_n$ , avec  $\varepsilon_n = n^{-\beta}e + \sqrt{n} \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{2\alpha_n e\sqrt{n}}$ , qui tend vers 0.

## 4.2 Minoration de $E(C_n)$

### 8. Théorème d'Erdős-Szekeres.

- (a) Par hypothèse sur  $u$ , tous les  $\alpha(k)$  sont inférieurs ou égaux à  $p - 1$  ; il y a donc  $p - 1$  valeurs possibles pour  $\alpha(k)$ . De plus,  $k$  varie dans un ensemble à  $N = (p - 1)(q - 1) + 1$  éléments. Par le principe des tiroirs,  $\alpha$  doit prendre une même valeur au moins  $q$  fois (sinon, toutes les valeurs sont prises un maximum de  $q - 1$  fois, ce qui entraîne  $N \leq (p - 1)(q - 1)$ ). D'où l'existence des indices  $i_1 < \dots < i_q$ .
- (b) Considérons  $j < j'$  dans  $[[1, q]]$ . On doit montrer que  $u_{i_j} > u_{i_{j'}}$ . Si ce n'était pas le cas, on aurait  $u_{i_j} < u_{i_{j'}}$ . Par hypothèse, il existe une suite extraite de  $u$  croissante, de longueur  $\alpha(i_{j'})$  démarrant en  $u_{i_{j'}}$ . En ajoutant  $u_{i_j}$  au début de cette suite, on obtient une suite extraite de  $u$  croissante, de longueur  $\alpha(i_{j'}) + 1$  démarrant en  $u_{i_j}$ . Ceci contredit le fait que  $\alpha(i_j) = \alpha(i_{j'})$ .

On a montré que si  $u$  n'a pas de suite extraite croissante de longueur  $p$ , alors elle a une désuite décroissante de longueur  $q$ . D'où le théorème.

9. Notons  $p = q = \lceil \sqrt{n} \rceil$ . On a  $\lceil \sqrt{n} \rceil < \sqrt{n} + 1$ . Donc,

$$(p - 1)(q - 1) + 1 < \sqrt{n} \times \sqrt{n} + 1 = n + 1.$$

Comme les quantités sont entières,  $n \geq (p - 1)(q - 1) + 1$ . Par le théorème d'Erdős-Szekeres, on peut donc extraire d'une suite de  $\sigma \in S^n$  (plus précisément de la liste des  $(p - 1)(q - 1) + 1$  éléments  $(\sigma(1), \dots, \sigma((p - 1)(q - 1) + 1))$ ) une suite croissante à  $p$  éléments ou une suite décroissante à  $q$  éléments. Donc,  $\Omega$  est l'union des deux événements  $(C_n \geq p)$  et  $(D_n \geq q)$ . Comme  $C_n$  et  $D_n$  sont à valeurs entières,  $(C_n \geq p) = (C_n \geq \sqrt{n})$  et  $(D_n \geq q) = (D_n \geq \sqrt{n})$ , ce qui conclut.

10. Si  $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ , notons  $\tilde{\sigma} = (\sigma(n), \dots, \sigma(1))$ . Si  $\sigma$  admet une suite extraite croissante de longueur  $p$ , alors, en prenant les mêmes indices,  $\tilde{\sigma}$  admet une suite extraite décroissante de longueur  $p$ . Comme c'est vrai pour tout  $p$ , on a  $C_n(\sigma) = D_n(\tilde{\sigma})$ . De plus,  $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$  est une involution de  $\mathcal{S}_n$ . Ainsi,  $C_n$  et  $D_n$  prennent les mêmes valeurs le même nombre de fois. Comme on a muni  $\Omega = \mathcal{S}_n$  de la probabilité uniforme, cela revient à dire que  $C_n$  et  $D_n$  ont la même loi.
11.  $\Omega$  est l'union des deux évènements  $(C_n \geq \sqrt{n})$  et  $(D_n \geq \sqrt{n})$  par Q9 et ces deux évènements ont même probabilité par Q10. Donc,  $P(C_n \geq \sqrt{n}) \geq 1/2$ . Donc,

$$E(C_n) \geq E(C_n \mathbf{1}_{C_n \geq \sqrt{n}}) \geq \sqrt{n} P(C_n \geq \sqrt{n}) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Ce qui conclut.