

DS 9 de mathématiques

Durée : 4h.

- Les calculatrices et autres technologies sont interdites.
- Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement. La copie doit être lisible, les pages numérotées, les calculs suffisamment détaillés, les résultats mis en valeur...
- L'exercice et les trois problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.
- Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

1 Exercice – Loi du nombre de désintégrations

On observe un nombre moyen $\lambda > 0$ de désintégrations d'un isotope radioactif pendant une unité de temps T . On cherche à déterminer la loi du nombre N de désintégrations. On modélise ainsi le problème :

- On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, qu'on fera ensuite tendre vers $+\infty$.
En particulier, on suppose que $\lambda/n < 1$.
- On découpe l'intervalle de temps en n intervalles I_1, \dots, I_n de même durée T/n . Dans chacun de ces intervalles, exactement une désintégration peut se produire.
- Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_k l'évènement : *Il y a une désintégration pendant l'intervalle I_k* . On suppose que les A_k sont indépendants et ont même probabilité p_n .
- On note N_n le nombre de désintégrations dans cette approximation. On a $E[N_n] = \lambda$.

1. Exprimer N_n en fonction des indicatrices $\mathbb{1}_{A_k}$. Donner la loi des $\mathbb{1}_{A_k}$.
En déduire la valeur de p_n en fonction de λ et n .
2. Déterminer la loi de N_n en justifiant rapidement. Rappeler la variance de N_n .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $P(N = k)$ la limite de $P(N_n = k)$, quand $n \rightarrow +\infty$.

3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(N = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$.

On dit que $k_0 \in \mathbb{N}$ est un mode de N si $P(N = k_0)$ est maximal parmi les valeurs $P(N = k)$.

4. Déterminer le(s) mode(s) de N .

2 Problème – Un calcul d'intégrales

Soit $n \geq 2$ un entier naturel impair¹. On note $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1} := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{dx}{x^n + 1}$.

On note Z l'ensemble des racines complexes de $X^n + 1$ distinctes de -1 et Z^+ celles de partie imaginaire strictement positive.

1. Expliciter les éléments de Z^+ .

Montrer que Z est l'union disjointe de Z^+ et $Z^- = \{\bar{\omega}, \omega \in Z^+\}$.

2. Montrer qu'il existe des nombres complexes α_{-1} et α_ω , pour tout ω dans Z , tels que

$$\frac{1}{X^n + 1} = \frac{\alpha_{-1}}{X + 1} + \sum_{\omega \in Z} \frac{\alpha_\omega}{X - \omega} \quad \text{dans } \mathbb{C}(X).$$

Déterminer les valeurs de α_{-1} et des α_ω , en expliquant brièvement la méthode employée.

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{n}{x^n + 1} = \frac{1}{x + 1} - 2 \sum_{\omega \in Z_+} \operatorname{Re} \left(\frac{\omega}{x - \omega} \right).$$

Si ω est dans Z_+ , on note c_ω sa partie réelle, s_ω sa partie imaginaire et θ_ω l'unique angle dans $]0, \pi[$ tel que $\omega = e^{i\theta_\omega}$.

4. Montrer que pour tout $\omega \in Z_+$,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\omega}{x - \omega} \right) = c_\omega \frac{(x - c_\omega)}{x^2 - 2xc_\omega + 1} - s_\omega \frac{s_\omega}{(x - c_\omega)^2 + s_\omega^2}.$$

5. En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^n + 1}$.

6. (a) Montrer que $2 \sum_{\omega \in Z_+} c_\omega = 1$.

(b) Montrer que, pour tout $\omega \in Z_+$, $\operatorname{Arctan} \left(-\frac{c_\omega}{s_\omega} \right) = \theta_\omega - \frac{\pi}{2}$.

(c) En déduire que $I_n = \frac{2}{n} \sum_{\omega \in Z_+} s_\omega (\pi - \theta_\omega)$.

Pour le calcul final, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^m k \sin(kx) = \frac{(m+1) \sin(mx) - m \sin(m+1)x}{4 \sin^2(x/2)}.$$

7. Déterminer la valeur de I_n .

¹Le même résultat est valable si n est pair, mais le calcul est légèrement différent.

3 Problème – Sur la décomposition LU

3.1 Décomposition LU

Soit \mathbb{K} un corps infini, soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note \mathcal{L} l'ensemble des matrices triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale et \mathcal{U} l'ensemble des matrices triangulaires supérieures avec des coefficients diagonaux non nuls.

Pour tous $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit $d_k(M) = \det M_k$, où M_k est la matrice extraite de M obtenue en gardant les k premières lignes et colonnes. On dit que M est régulière si toutes les quantités $d_k(M)$ sont non nulles.

On souhaite montrer le résultat suivant.

Pour tout $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ régulière, il existe un unique couple $(L, U) \in \mathcal{L} \times \mathcal{U}$ tel que $M = LU$.

On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ étant trivial, on suppose que $n \geq 2$ et que le résultat est démontré pour $n - 1$.

1. Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice régulière. On raisonne par analyse-synthèse en considérant $(L, U) \in \mathcal{L} \times \mathcal{U}$ tel que $M = LU$. On écrit ces matrices par blocs : $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$, avec $M_{11} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $M_{12} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$, $M_{21} \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $M_{22} \in \mathbb{K}$; de même pour L et U .
 - (a) Montrer que L_{11} et U_{11} sont uniquement déterminés par M .
 - (b) Montrer que L_{11} et U_{11} sont inversibles. En déduire l'unicité du couple (L, U) .
 - (c) Conclure.
2. Exprimer, en fonction des $d_k(M)$, les coefficients diagonaux de U dans la décomposition $M = LU$.

3.2 Réduction à une matrice régulière

On cherche à montrer que toute matrice $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice régulière.

3. On suppose que M n'est pas une matrice scalaire.
 - (a) Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{K}^n$ tel que X et MX ne sont pas colinéaires.
 - (b) En déduire que M est semblable à une matrice dont la première colonne est $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)^T$.
4. Soit M une matrice dont la première colonne est $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)^T$.
Pour tout $U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$, on note P_U la matrice par blocs $P_U = \begin{pmatrix} I_{n-1} & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On note aussi $M' = P_U M P_U^{-1}$ et on écrit M et M' par blocs : $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} M'_{11} & M'_{12} \\ M'_{21} & M'_{22} \end{pmatrix}$, avec $M_{11}, M'_{11} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

- (a) Montrer que, pour tout U , P_U est inversible et donner son inverse.
- (b) Montrer que les colonnes d'indice $2, \dots, n-1$ de M_{11} forment une famille libre.
- (c) En déduire que, pour un choix convenable de U , M'_{11} est inversible.

5. Conclure.

3.3 Une application

6. Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice régulière. Montrer qu'il existe $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que
- $M = AB$;
 - A est triangulaire inférieure avec des coefficients distincts sur la diagonale ;
 - B est triangulaire supérieure avec des coefficients distincts sur la diagonale.
7. Montrer que A et B sont diagonalisables². On pourra considérer leur polynôme caractéristique.
8. En déduire que toute matrice de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est produit de deux matrices diagonalisables.

4 Problème – Longueur maximale d'une suite extraite croissante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble $\Omega = \mathcal{S}_n$ des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de la probabilité uniforme. Par commodité, on pourra aussi penser à Ω comme à l'ensemble des n -listes sans répétition dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, en identifiant σ et $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

On définit une variable aléatoire C_n à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ comme la longueur maximale d'une suite croissante extraite de $\sigma \in \Omega$. Formellement,

$$C_n(\sigma) = \max\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \exists i_1 < \dots < i_k \in \llbracket 1, n \rrbracket : \sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)\}.$$

De même, D_n est la longueur maximale d'une suite extraite décroissante.

4.1 Majoration de $E(C_n)$

1. Donner la loi et l'espérance de C_n , pour $n = 2, 3, 4$.
2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $s = (i_1, \dots, i_k)$ un k -uplet strictement croissant d'entiers dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note A^s l'évènement : la liste $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$ est strictement croissante. Montrer soigneusement que $P(A^s) = \frac{1}{k!}$.
3. En déduire que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(C_n \geq k) \leq \frac{\binom{n}{k}}{k!}$.
4. Soit $\alpha > 1$ un réel. On pose $k = \lceil \alpha e \sqrt{n} \rceil$. Montrer que

$$P(C_n \geq \alpha e \sqrt{n}) \leq \frac{n^k}{(k!)^2}.$$

²C'est-à-dire semblable à des matrices diagonales.

5. Montrer que $e^k \geq \frac{k^k}{k!}$. En déduire que $P(C_n \geq \alpha e \sqrt{n}) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e \sqrt{n}}$.

6. Montrer que $\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leq \alpha e + \sqrt{n} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e \sqrt{n}}$.

7. En déduire qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de limite nulle telle que :

$$\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leq e + \varepsilon_n.$$

4.2 Minoration de $E(C_n)$

8. **Théorème d'Erdős-Szekeres.** Soient p et q deux entiers naturels.

On note $N = (p-1)(q-1) + 1$. Soit $(u_k)_{k \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ une suite finie de réels. On cherche à montrer qu'il existe *ou bien* une suite extraite de u croissante de longueur p , *ou bien* une suite extraite de u décroissante de longueur q .

On suppose qu'il n'existe pas de suite extraite de u croissante de longueur p .

(a) Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note $\alpha(k)$ la longueur maximale d'une suite extraite de u croissante, de premier terme u_k . Montrer que

$$\exists i_1 < \dots < i_q \in \llbracket 1, N \rrbracket : \forall j, j' \in \llbracket 1, q \rrbracket, \alpha(i_j) = \alpha(i_{j'}).$$

(b) On considère de tels indices. Montrer que $(u_{i_1}, \dots, u_{i_q})$ est décroissante et conclure.

9. En déduire que $\Omega = (C_n \geq \sqrt{n}) \cup (D_n \geq \sqrt{n})$.

10. Montrer que C_n et D_n ont la même loi.

11. En déduire que $\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2}$.

Pour la culture. On peut en fait montrer que $\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \rightarrow 2$, quand $n \rightarrow +\infty$, et même que

$$E(C_n) = 2\sqrt{n} - cn^{1/6} + o(n^{1/6}),$$

où $c \cong 1,77$ est une constante.