

Semaine 28 – Espaces préhilbertiens

1 Produit scalaire

- Produit scalaire, espace préhilbertien réel
- Exemples classiques
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité
- Norme associée à un produit scalaire
- Notion générale de norme sur un \mathbb{R} -espace vectoriel (HP)
- Identités de polarisation
- Distance associée à la norme euclidienne
- Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie
- Famille orthogonale, orthonormale
- Processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt
- Théorème de Pythagore

2 Espace euclidien

- Existence de bases orthonormales en dimension finie
- Calculs dans une base orthonormale, interprétation matricielle
- Si F est de dimension finie dans un espace préhilbertien E , alors $E = F \oplus F^\perp$.
- Projection orthogonale
- Distance à un sous-espace
- Caractérisation du projeté orthogonal comme l'unique vecteur minimisant la distance au sous-espace

3 Compléments sur les isométries vectorielles

- Caractérisation des isométries d'un espace euclidien
- Les isométries forment un groupe, noté $O(E)$
- Groupe orthogonal, version matricielle ; notation $O_n(\mathbb{R})$
- Un endomorphisme de E est une isométrie ssi sa matrice dans une BON de E est une matrice orthogonale
- Isomorphisme $O(E) \cong O_n(\mathbb{R})$, via une BON de E
- Le déterminant d'une isométrie/d'une matrice orthogonale est ± 1
- Groupe spécial orthogonal : notation $SO(E)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$

- Détermination des matrices orthogonales en dimension 2 ; matrices des rotations R_θ et des symétries axiales S_θ

4 Questions de cours

- Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (+ éventuellement le cas d'égalité)
- Processus de Gram-Schmidt : réalisation concrète
- Si F est de dimension finie dans un espace préhilbertien E , alors $E = F \oplus F^\perp$.
- Calcul pratique de la distance d'un vecteur à un sous-espace