

Familles sommables

1 Sommabilité

EXERCICE 1. ♣ – ●●○ Étude de sommabilité

Les familles suivantes sont-elle sommables ($\alpha > 0$) ?

$$1. \left(\frac{2^n + 3^m}{(n+m)!} \right)_{n,m \in \mathbb{N}}$$

$$3. \left(\frac{1}{(n^2 + m^2)^\alpha} \right)_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \setminus \{(0,0)\}}$$

$$2. \left(\frac{1}{n^2 - m^2} \right)_{\substack{n,m \in \mathbb{N}^* \\ n \neq m}}$$

$$4. \left(\frac{1}{r^2} \right)_{r \in \mathbb{Q} \cap]1, +\infty[}$$

EXERCICE 2. ●●● Théorème de réarrangement de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente, soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Montrer qu'il existe une bijection $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\phi(n)} = \ell$.

EXERCICE 3. ●●● Séries d'Eisenstein

On définit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$.

1. Soit k un entier et $z \in \mathbb{H}$. Montrer qu'il existe $A_z \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{1}{|az + b|^k} \leq \frac{A_z}{\max(|a|, |b|)^k}.$$

2. Soit $k \geq 3$ un entier et $z \in \mathbb{H}$. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(nz + m)^k} \right)_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ est sommable.

3. Soit $G_k : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(nz + m)^k}$. Calculer G_k quand k est impair.

4. On suppose k pair. Montrer que $\lim_{y \rightarrow +\infty} G_k(iy) = 2\zeta(k)$.

2 Calculs de sommes de familles sommables

EXERCICE 4. ●●○ Une somme double

Soit $p \geq 3$ un entier. Calculer $\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$.

EXERCICE 5. ●●○ Une expression de $\zeta(3)$

Montrer que $\sum_{n,m \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{nm(n+m)} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{H_n}{n^2} = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{H_n}{(n+1)^2} = 2\zeta(3)$.

EXERCICE 6. ●●● Une somme avec l'indicatrice d'Euler

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi(n)}{2^{n-1}}$.