

# 27 - Familles sommables

Jeremy Daniel

## 1 Familles sommables de nombres réels positifs

DÉFINITION 1.1 (Somme d'une famille de réels positifs)

Soit  $(a_k)_{k \in I}$  une famille de nombres réels positifs, indexée par un ensemble  $I$ . La somme  $\sum_{k \in I} a_k$  est définie comme la borne supérieure dans  $[0, +\infty]$  de  $\left\{ \sum_{k \in F} a_k, F \subset I \text{ fini} \right\}$ .

DÉFINITION 1.2 (Famille sommable)

La famille  $(a_k)_{k \in I}$  est sommable si  $\sum_{k \in I} a_k$  est finie.

REMARQUE 1.3

Si pour tout  $k \in I$ ,  $a_k \leq b_k$  et que  $(b_k)_{k \in I}$  est sommable, alors  $(a_k)_{k \in I}$  est sommable.

Mais il n'y a pas de sens en général à parler de comparaison asymptotique entre les  $a_k$  et les  $b_k$  (pas de  $o$  ou  $O$ ).

EXERCICE 1.4

On suppose que  $I = \mathbb{N}$ . Montrer que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable ssi la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  est convergente. Montrer que dans ce cas les deux notions de somme coïncident.

REMARQUE 1.5

Il y a un léger conflit de notations entre les deux approches. Du point de vue des séries,

$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  ou  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  désigne plutôt la série et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  sa somme ; du point de vue des familles sommables, seule existe la notation  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  pour parler de la somme.

Le plus simple est de préférer systématiquement la notation  $\sum a_n$  (sans indices) pour parler de la série.

EXERCICE 1.6

Soit  $(a_k)_{k \in I}$  une famille sommable de réels strictement positifs.

Montrer que  $I$  est dénombrable.

**PROPOSITION 1.7** (Invariance par permutation)

Soit  $(a_k)_{k \in I}$  une famille de nombres positifs, soit  $\sigma$  une permutation de  $I$ .

La famille  $(a_k)_{k \in I}$  est sommable ssi la famille  $(a_{\sigma(k)})_{k \in I}$  est sommable.

De plus, on a dans tous les cas  $\sum_{k \in I} a_k = \sum_{k \in I} a_{\sigma(k)}$ , dans  $[0, +\infty]$ .

**PROPOSITION 1.8** (Linéarité)

Soit  $I$  un ensemble. L'ensemble  $\text{Som}(I)$  des familles sommables de nombres réels positifs indexées par  $I$  est stable par somme et multiplication par un réel positif.

De plus, l'application somme

$$s : \text{Som}(I) \rightarrow \mathbb{R}, (a_k)_{k \in I} \mapsto \sum_{k \in I} a_k$$

préserve la somme et la multiplication par un réel positif.

**THÉORÈME 1.9** (Somme par paquets)

On suppose que  $I$  est réunion disjointe des  $I_j$ , où  $j \in J$ . Soit  $(a_k)_{k \in I}$  une famille de nombres positifs. On a l'égalité :

$$\sum_{k \in I} a_k = \sum_{j \in J} \left( \sum_{k \in I_j} a_k \right) \text{ dans } [0, +\infty].$$

En particulier, la famille  $(a_k)_{k \in I}$  est sommable ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- Pour tout  $j \in J$ , la famille  $(a_k)_{k \in I_j}$  est sommable
- La famille  $\left( \sum_{k \in I_j} a_k \right)_{j \in J}$  est sommable.

**EXERCICE 1.10**

Pour quels  $\alpha > 0$ , la famille  $\left( \frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est-elle sommable ?

**COROLLAIRE 1.11** (Fubini)

Soient  $(a_k)_{k \in I}$  et  $(b_\ell)_{\ell \in J}$  deux familles de nombres réels positifs. On a

$$\sum_{(k,\ell) \in I \times J} a_k b_\ell = \left( \sum_{k \in I} a_k \right) \left( \sum_{\ell \in J} b_\ell \right).$$

En particulier, si les deux familles ne sont pas identiquement nulles, la famille  $(a_k b_\ell)_{(k,\ell) \in I \times J}$  est sommable ssi les familles  $(a_k)_{k \in I}$  et  $(b_\ell)_{\ell \in J}$  sont sommables.

## 2 Familles sommables de nombres complexes

**DÉFINITION 2.1** (Famille sommable)

Une famille  $(a_k)_{k \in I}$  de nombres complexes est sommable si la famille  $(|a_k|)_{k \in I}$  est sommable.

**PROPOSITION 2.2**

On a les relations suivantes sur la sommabilité des familles :

- Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.
- Si  $(a_k)_{k \in I} \in \mathbb{C}^I$  et  $(u_i)_{k \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$  sont telles que  $\forall k \in I, |a_k| \leq u_i$  et si  $(u_i)_{k \in I}$  est sommable, alors  $(a_k)_{k \in I}$  est sommable.
- La famille  $(a_k)_{k \in I} \in \mathbb{R}^I$  est sommable ssi les familles  $((a_k)_+)_{k \in I}$  et  $((a_k)_-)_{k \in I}$  le sont.
- La famille  $(a_k)_{k \in I} \in \mathbb{C}^I$  est sommable ssi les familles  $(\operatorname{Re}(a_k))_{k \in I}$  et  $(\operatorname{Im}(a_k))_{k \in I}$  le sont.

**NOTATION 2.3**

On note  $\ell^1(I, \mathbb{R})$  et  $\ell^1(I, \mathbb{C})$  l'ensemble des familles sommables de réels/complexes indexées par  $I$ .

**DÉFINITION 2.4** (Somme d'une famille sommable)

Si  $(a_k)_{k \in I} \in \ell^1(I, \mathbb{R})$ , sa somme  $\sum_{k \in I} a_k$  est définie par

$$\sum_{k \in I} a_k = \sum_{k \in I} (a_k)_+ - \sum_{k \in I} (a_k)_-.$$

Si  $(z_k)_{k \in I} \in \ell^1(I, \mathbb{C})$ , sa somme  $\sum_{k \in I} z_k$  est définie par

$$\sum_{k \in I} z_k = \sum_{k \in I} \operatorname{Re}(z_k) + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im}(z_k).$$

**REMARQUE 2.5**

Dans le cas où  $I = \mathbb{N}$ , la famille  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est sommable ssi la série  $\sum a_k$  est absolument convergente. De plus, les deux notions de somme coïncident.

**PROPOSITION 2.6** (Linéarité)

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $\ell^1(\mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^I$ . De plus, l'application somme

$$s : \ell^1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, (a_k)_{k \in I} \mapsto \sum_{k \in I} a_k$$

est une forme linéaire.

**THÉORÈME 2.7** (Approximation par les sommes finies)

Soit  $(a_k)_{k \in I} \in \ell^1(\mathbb{K})$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie finie  $F \subset I$  telle que

$$\left| \sum_{k \in I} a_k - \sum_{k \in F} a_k \right| \leq \varepsilon.$$

EXERCICE 2.8

On précise ce résultat. Soit  $(a_k)_{k \in I}$  dans  $\mathbb{K}^I$ , soit  $S \in \mathbb{K}$ . Montrer l'équivalence entre

1. La famille  $(a_k)_{k \in I}$  est sommable, de somme  $S$ .
2. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $F \subset I$  finie telle que, pour tout  $F'$  finie contenant  $F$ ,

$$\left| \sum_{k \in F'} a_k - S \right| \leq \varepsilon.$$

**PROPOSITION 2.9** (Invariance par permutation)

Si  $(a_k)_{k \in I} \in \ell^1(\mathbb{K})$ , alors pour toute permutation  $\sigma$  de  $I$ ,  $(a_{\sigma(k)})_{k \in I} \in \ell^1(\mathbb{K})$  et

$$\sum_{k \in I} a_k = \sum_{k \in I} a_{\sigma(k)}.$$

REMARQUE 2.10

A contrario, si  $\sum a_n$  est une série semi-convergente, pour tout  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , on peut trouver une

permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$  telle que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \ell$ .

C'est le théorème de réarrangement de Riemann.

**THÉORÈME 2.11** (Somme par paquets)

On suppose que  $I$  est réunion disjointe des  $I_j$ , pour  $j \in J$ . Si la famille  $(a_k)_{k \in I}$  est sommable, alors :

1. Pour tout  $j \in J$ , la famille  $(a_k)_{k \in I_j}$  est sommable.
2. La famille  $\left( \sum_{k \in I_j} a_k \right)_{j \in J}$  est sommable.

Dans ce cas, on a  $\sum_{k \in I} a_k = \sum_{j \in J} \left( \sum_{k \in I_j} a_k \right)$ .

ATTENTION !

La réciproque est fautive. Considérer la famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}}$ , définie par  $a_n = 1$  si  $n > 0$  et  $-1$  sinon; et pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_j = \{\pm j\}$ .

**COROLLAIRE 2.12** (Théorème de Fubini)

Si les familles  $(a_k)_{k \in I}$  et  $(b_\ell)_{\ell \in J}$  sont sommables, la famille  $(a_k b_\ell)_{(k, \ell) \in I \times J}$  aussi et

$$\sum_{(k, \ell) \in I \times J} a_k b_\ell = \left( \sum_{k \in I} a_k \right) \left( \sum_{\ell \in J} b_\ell \right).$$

**COROLLAIRE 2.13** (Produit de Cauchy)

Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_p$  deux séries absolument convergentes. Alors, la série de terme général

$$\sum_{n+p=k} a_n b_p \text{ est absolument convergente et } \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{n+p=k} a_n b_p \right) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \right).$$

REMARQUE 2.14

La somme finie  $\sum_{n+p=k} a_n b_p$  peut être réécrite en  $\sum_{n=0}^k a_n b_{k-n}$ .

REMARQUE 2.15

Dans le cas de séries à termes positifs, on a toujours égalité entre les deux membres, en convenant qu'une somme divergente a pour somme  $+\infty$ .

EXEMPLE 2.16

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on définit  $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ . Justifier la définition et montrer que

$$\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times), z \mapsto e^z$$

est un morphisme de groupes.