

26 - Espaces préhilbertiens

Jeremy Daniel

On désigne par E un espace vectoriel réel.

1 Produit scalaire

1.1 Produit scalaire

DÉFINITION 1.1 (Forme bilinéaire symétrique, positive, définie positive)

Une forme bilinéaire $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est :

- symétrique si $\forall x, y \in E, B(x, y) = B(y, x)$;
- positive si $\forall x \in E, B(x, x) \geq 0$;
- définie positive si $\forall x \in E - \{0\}, B(x, x) > 0$.

DÉFINITION 1.2 (Produit scalaire)

Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

DÉFINITION 1.3 (Espace préhilbertien réel)

Un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire est un espace préhilbertien réel.

NOTATION 1.4

On utilisera souvent les notations $\langle x | y \rangle$, $(x | y)$, $\langle x, y \rangle$ ou $x \cdot y$ pour désigner le produit scalaire $B(x, y)$ (quand B est clair dans le contexte).

EXEMPLES 1.5

- Dans $E = \mathbb{R}^n$, $B : (x, y) \mapsto \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire.

C'est le *produit scalaire usuel* ou *canonique* sur \mathbb{R}^n .

- Dans $E = \mathbb{R}[X]$, $B : (P, Q) \mapsto \int_0^1 PQ$ est un produit scalaire. La symétrie est claire et si $B(P, P) = 0$, alors $P^2 = 0$ sur $[0, 1]$, ce qui implique $P = 0$.

- On peut aussi définir un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ par $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$. La même formule définit une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, mais elle n'est pas définie positive.

- Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B : (M, N) \mapsto \text{Tr}(M^T N)$ est un produit scalaire. Pour la symétrie, $\text{Tr}(M^T N) = \text{Tr}((M^T N)^T) = \text{Tr}(N^T M)$. Pour le caractère défini positif, on écrit $\text{Tr}(M^T M) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{j,i}^2 \right)$, de sorte que $\text{Tr}(M^T M)$ est strictement positif si M n'est pas la matrice nulle.
- Considérons (Ω, P) un univers probabilisé fini. Notons E l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur (Ω, P) . L'application $\text{Cov} : (X, Y) \mapsto \text{Cov}(X, Y)$ est une forme bilinéaire symétrique positive. Elle n'est pas définie positive car si $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ est nul, on peut seulement dire que X est presque sûrement constante. La restriction de Cov à un sous-espace vectoriel de E ne contenant aucune variable aléatoire presque sûrement constante (à part la variable aléatoire nulle) est un produit scalaire.

THÉORÈME 1.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ une application bilinéaire symétrique positive sur un espace vectoriel réel E . Pour tous $x, y \in E$:

$$|\langle x | y \rangle| \leq \sqrt{\langle x | x \rangle} \sqrt{\langle y | y \rangle}.$$

PROPOSITION 1.7 (Cas d'égalité)

Dans l'énoncé précédent, si $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est définie positive (donc un produit scalaire), on a l'égalité $|\langle x | y \rangle| = \sqrt{\langle x | x \rangle} \sqrt{\langle y | y \rangle}$ ssi x et y sont colinéaires.

EXEMPLES 1.8

- Dans \mathbb{R}^n : si (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) sont des n -uplets de réels, alors

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

- Dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$: si f et g sont des fonctions continues sur $[a, b]$, alors

$$\left| \int_a^b f g \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2}.$$

- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: si M et N sont deux matrices carrées de taille n , alors

$$|\text{Tr}(M^T N)| \leq \sqrt{\text{Tr}(M^T M)} \sqrt{\text{Tr}(N^T N)}.$$

ATTENTION !

Pour ne pas se tromper dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (oubli des racines carrées...), vérifier systématiquement l'homogénéité de la formule.

1.2 Norme euclidienne

DÉFINITION 1.9 (Norme - HP)

Une norme sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

- **Homogénéité** : pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$: $N(\lambda \cdot x) = |\lambda|N(x)$;
- **Séparation** : pour tout $x \in E - \{0\}$, $N(x) > 0$.
- **Inégalité triangulaire** : pour tous $x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

EXEMPLES 1.10

- Sur \mathbb{R}^n : Pour tout $p \geq 1$, on définit la norme p par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

- Sur \mathbb{R}^n : on définit la norme infinie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = \sup\{|x_k|, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}.$$

- On définit des analogues des normes p et de la norme infinie sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

PROPOSITION 1.11 (Norme associée à un produit scalaire, norme euclidienne)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application

$$N : E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}$$

est une norme sur E . Une telle norme est dite euclidienne.

PROPOSITION 1.12

Si N est euclidienne, l'égalité $N(x + y) = N(x) + N(y)$ a lieu ssi x et y sont positivement liés.

NOTATION 1.13

Si x est un vecteur d'un espace préhilbertien réel E , on note souvent $\|x\|$ la norme du vecteur x .

DÉFINITION 1.14 (Vecteur unitaire)

Un vecteur de E est unitaire s'il est de norme 1.

REMARQUE 1.15

Si x est un vecteur non nul de E , il existe exactement deux vecteurs unitaires colinéaires à x : $\pm \frac{x}{\|x\|}$.

PROPOSITION 1.16 (Distance associée à un produit scalaire)

Soit E un espace préhilbertien réel, de norme $\|\cdot\|$. L'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$, définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ vérifie :

- **Séparation** : $\forall x, y \in E : d(x, y) = 0$ si, et seulement si $x = y$.
- **Inégalité triangulaire** : $\forall x, y, z \in E : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

PROPOSITION 1.17 (Identités de polarisation)

Soit E un espace préhilbertien réel, dont on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme. Pour tous x et y de E , on a

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

REMARQUE 1.18

On dispose aussi de l'identité du parallélogramme : pour tous x et y de E :

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2.$$

(déjà vu dans \mathbb{R}^2 , avec le point de vue apporté par les nombres complexes)

PROPOSITION 1.19 (Caractérisation des normes euclidiennes - HP)

Soit N une norme sur E . La norme N est euclidienne ssi l'application

$$(x, y) \in E^2 \mapsto \frac{1}{2} (N(x + y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2)$$

est bilinéaire.

EXERCICE 1.20

Sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on a défini la norme infinie par $\|f\|_\infty = \sup_{[a, b]} |f|$.

Montrer que $\| \cdot \|_\infty$ est bien une norme. Est-elle euclidienne ?

1.3 Orthogonalité

Dans la suite, E est un espace préhilbertien réel, dont on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme.

DÉFINITION 1.21 (Vecteurs orthogonaux, parties orthogonales.)

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $\langle x | y \rangle = 0$.

Deux parties A et B de E sont orthogonales si pour tout couple (x, y) de $A \times B$, x est orthogonal à y .

DÉFINITION 1.22 (Orthogonal d'une partie)

Soit A une partie de E . L'orthogonal de A , noté A^\perp , est l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, \langle x | y \rangle = 0\}.$$

PROPOSITION 1.23

Soient A et B deux parties de E . On a les propriétés suivantes :

- a) A^\perp est un sous-espace vectoriel de E ;
- b) Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$;
- c) $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$;
- d) $A \subset (A^\perp)^\perp$;
- e) $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$;
- f) $A \cap A^\perp \subset \{0\}$.

ATTENTION !

Même dans le cas où A est sous-espace vectoriel de E , l'inclusion $A \subset (A^\perp)^\perp$ n'est pas une égalité en général. On peut par exemple considérer $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f | g \rangle = \int_0^1 fg$. On note A l'ensemble des applications polynomiales sur $[0, 1]$. Alors $A^\perp = \{0\}$ (corollaire du théorème de Weierstrass) et donc $(A^\perp)^\perp = E$.

DÉFINITION 1.24 (Famille orthogonale, famille orthonormale)

Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est orthogonale si les e_i sont deux à deux orthogonaux. Elle est orthonormale (ou orthonormée) si, de plus, chaque e_i est de norme 1.

REMARQUE 1.25

Pour une famille orthonormale $(e_i)_{i \in I}$, on a donc $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j}$.

THÉORÈME 1.26 (Pythagore)

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille orthogonale. Alors $\|e_1 + \dots + e_n\|^2 = \|e_1\|^2 + \dots + \|e_n\|^2$.

PROPOSITION 1.27

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est une famille libre.

THÉORÈME 1.28 (Processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille libre de E . Il existe une famille orthonormale (f_1, \dots, f_n) telle que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$.

REMARQUE 1.29

En particulier, les deux familles engendrent le même sous-espace vectoriel.

EXERCICE 1.30

Montrer qu'on a existence et unicité d'une telle famille orthonormale (f_1, \dots, f_n) si on demande de plus que $\langle e_k | f_k \rangle > 0$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2 Espace euclidien

2.1 Bases orthonormales

DÉFINITION 2.1 (Espace euclidien)

Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.

PROPOSITION 2.2

Toute famille orthonormale d'un espace euclidien E peut être complétée en une base orthonormale.

COROLLAIRE 2.3

Dans un espace euclidien E , il existe des bases orthonormales.

PROPOSITION 2.4 (Calculs dans une base orthonormale)

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien E . Si $x, y \in E$, on note

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^n x_k e_k \text{ et } y = \sum_{k=1}^n y_k e_k. \text{ Alors} \\ &- \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \langle x \mid e_k \rangle ; \\ &- \langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k ; \\ &- \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2. \end{aligned}$$

REMARQUE 2.5

Matriciellement, si $X = \text{Mat}_e(x)$ et $Y = \text{Mat}_e(y)$, on peut réécrire les deux dernières égalités comme $\langle x \mid y \rangle = X^T Y$ et $\|x\|^2 = X^T X$.

2.2 Projection orthogonale

PROPOSITION 2.6

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien E .

Alors $F \oplus F^\perp = E$.

DÉFINITION 2.7 (Projeté orthogonal)

Soit $x \in E$. On garde les notations de la preuve précédente et on écrit

$$x = p_F(x) + (x - p_F(x)),$$

avec $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$. Le vecteur $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F .

REMARQUE 2.8

L'endomorphisme de E , $x \mapsto p_F(x)$ est la projection sur F parallèlement à F^\perp .

REMARQUE 2.9

Si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de F , on a

$$p_F(x) = \langle x | e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x | e_n \rangle e_n.$$

DÉFINITION 2.10 (Distance à un sous-espace)

Si F est un sous-espace de dimension finie de E , on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$ la distance de x à F .

PROPOSITION 2.11 (Caractérisation du projeté orthogonal)

Pour tout x de E , $p_F(x)$ est l'unique point y_0 de F tel que $d(x, y_0) = d(x, F)$.

EXEMPLES 2.12

- On considère D la droite engendrée par un vecteur $u \neq 0$. Alors $\frac{u}{\|u\|}$ est un vecteur unitaire et $p_D(x) = \frac{\langle x | u \rangle}{\|u\|^2} u$. Donc, $d(x, D) = \|x - p_D(x)\| = \|x - \frac{\langle x | u \rangle}{\|u\|^2} u\|$.
- On suppose que E est euclidien de dimension n et on considère H un hyperplan de E . On note (e_1, \dots, e_{n-1}) une base orthonormale de H et on la complète en une base (e_1, \dots, e_n) de E .
Alors $x - p_H(x)$ est la projection orthogonale de x sur $\text{Vect}(e_n)$. Donc,

$$d(x, H) = \|x - p_H(x)\| = |\langle x, e_n \rangle|.$$

EXERCICE 2.13

Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (e^t - at - b)^2 dt$.

3 Compléments - Orientation, produit mixte, produit vectoriel

3.1 Orientations

DÉFINITION 3.1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On définit une relation binaire \mathcal{R} sur l'ensemble des bases de E par $\mathbf{e} \mathcal{R} \mathbf{e}' \iff \det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}') > 0$.

PROPOSITION 3.2

La relation \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E . Il y a exactement deux classes d'équivalence : si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , toute base de E est \mathcal{R} -équivalente à (e_1, \dots, e_n) ou à $(e_1, \dots, -e_n)$.

DÉFINITION 3.3 (Orientation d'un espace vectoriel réel)

On appelle orientation de E le choix d'une de ces deux classes d'équivalence. Une base de E est directe si elle est dans la classe d'équivalence choisie, indirecte sinon.

REMARQUE 3.4

En résumé, se donner une orientation d'un espace vectoriel revient à choisir une base particulière \mathbf{e} et déclarer qu'une autre base \mathbf{e}' est directe si, et seulement si $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}') > 0$.

EXEMPLE 3.5

En général, on choisit comme orientation de \mathbb{R}^n celle donnée par la base canonique (e_1, \dots, e_n) .

PROPOSITION 3.6

Soit H un hyperplan d'un espace euclidien orienté E . Soit a un vecteur non nul de la droite $D = H^\perp$. Parmi les deux orientations possibles de H , une seule vérifie la propriété suivante :

Une base (e_1, \dots, e_{n-1}) de H est directe ssi la base (e_1, \dots, e_{n-1}, a) de E est directe.

REMARQUE 3.7

En résumé, si une orientation de E est fixée, si H est un hyperplan de E et si a est un vecteur normal à H , on peut choisir de façon naturelle une orientation de H .

3.2 Produit mixte et produit vectoriel

PROPOSITION 3.8

Soient \mathbf{e} et \mathbf{e}' deux bases orthonormales directes d'un espace euclidien orienté E . Alors $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}') = 1$.

DÉFINITION 3.9 (Produit mixte)

Soient (u_1, \dots, u_n) une famille de n vecteurs dans un espace euclidien orienté E de dimension n . Si \mathbf{e} est une base orthonormale directe de E , on définit le produit mixte de (u_1, \dots, u_n) , noté $[u_1, \dots, u_n]$ comme

$$[u_1, \dots, u_n] = \det_{\mathbf{e}}(u_1, \dots, u_n).$$

REMARQUE 3.10

Dans \mathbb{R}^n muni de sa structure usuelle d'espace euclidien orienté, le produit mixte (u_1, \dots, u_n) se comprend comme le volume orienté du parallépipède engendré par les vecteurs u_1, \dots, u_n (dans cet ordre).

PROPOSITION 3.11

Si f est un endomorphisme d'un espace euclidien orienté E de dimension finie n ,

$$[f(u_1), \dots, f(u_n)] = \det(f)[u_1, \dots, u_n].$$

REMARQUE 3.12

Cette notion de produit mixte permet de définir la notion voisine de produit vectoriel.

PROPOSITION 3.13

Soit E un espace euclidien. L'application $\psi : E \rightarrow E^*$, définie par

$$\psi(x) = (l_x : y \mapsto \langle x | y \rangle).$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

COROLLAIRE 3.14

Soient (u_1, \dots, u_{n-1}) une famille de $n - 1$ vecteurs dans un espace euclidien orienté E de dimension n . Il existe un unique vecteur x tel que, pour tout vecteur u_n de E , on ait l'égalité

$$[u_1, \dots, u_n] = \langle x | u_n \rangle.$$

DÉFINITION 3.15 (Produit vectoriel)

Le vecteur x ainsi défini est le produit mixte de (u_1, \dots, u_{n-1}) . On le note $u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1}$.

REMARQUE 3.16

En dimension 3, si u et v ont pour coordonnées (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans une base orthonormée directe, on a

$$u \wedge v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

dans cette même base.

4 Compléments - Isométries vectorielles

Dans la suite, E est un espace euclidien, de produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et de norme $\| \cdot \|$.

4.1 Isométries

PROPOSITION 4.1

Soit u un endomorphisme de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$;
- ii) $\forall x, y \in E, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$;
- iii) Toute base orthonormale de E est envoyée sur une base orthonormale de E ;
- iv) Il existe une base orthonormale de E dont l'image par u est une base orthonormale de E .

DÉFINITION 4.2 (Isométrie vectorielle)

On appelle isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) un endomorphisme respectant ces propriétés.

EXEMPLE 4.3

Une symétrie s de E est une isométrie vectorielle ssi ses sous-espaces caractéristiques $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ sont orthogonaux.

On parle alors de symétrie orthogonale.

PROPOSITION 4.4 (Les isométries forment un groupe)

L'ensemble des isométries d'un espace vectoriel est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$.

NOTATION 4.5

On note $\text{O}(E)$ ce sous-groupe et on l'appelle groupe orthogonal de E .

4.2 Groupe orthogonal - version matricielle

DÉFINITION 4.6 (Matrice orthogonale)

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $M^T M = I_n$.

PROPOSITION 4.7

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M est une matrice orthogonale ;*
- ii) M^T est une matrice orthogonale ;*
- iii) les colonnes de M forment une base orthonormale de \mathbb{R}^n ;*
- iv) les lignes de M forment une base orthonormale de \mathbb{R}^n .*

PROPOSITION 4.8

L'ensemble des matrices orthogonales forme un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

NOTATION 4.9

C'est le groupe orthogonal $\text{O}_n(\mathbb{R})$.

PROPOSITION 4.10

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à ± 1 .

THÉORÈME 4.11

Soit E un espace euclidien de dimension n . Soit u un endomorphisme de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) u est une isométrie vectorielle ;*
- ii) Pour toute base orthonormale e de E , $\text{Mat}_e(u)$ est une matrice orthogonale ;*
- iii) Il existe une base orthonormale e de E telle que $\text{Mat}_e(u)$ est une matrice orthogonale.*

PROPOSITION 4.12

Soit E un espace euclidien, e une base orthonormale de E et e' une base quelconque de E . La matrice de passage $P_{e'}^e$ est orthogonale si, et seulement si e' est une base orthonormale.

COROLLAIRE 4.13

Si e et e' sont deux bases orthonormales de E , on a $\det_e(e') = \pm 1$. Si, de plus, E est orienté et si e et e' sont deux bases orthonormales directes, alors $\det_e(e') = 1$.

DÉFINITION 4.14

L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$: c'est le *groupe spécial orthogonal*, noté $SO_n(\mathbb{R})$.

De même, si E est un espace euclidien, l'ensemble des isométries vectorielles de E de déterminant 1 est un sous-groupe de $O(E)$: on le note $SO(E)$.

EXEMPLE 4.15

Si s est une symétrie orthogonale par rapport à F et parallèlement à F^\perp , le déterminant de s est $(-1)^{\dim G}$. Ainsi, $s \in SO(E)$ ssi $\dim G$ est paire.

Les réflexions de E sont les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan. Elles ne sont pas dans $SO(E)$.

PROPOSITION 4.16

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit e une base orthonormale de E .

L'isomorphisme de groupes $\phi : GL(E) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$, défini par $\phi(u) = \text{Mat}_e(u)$, induit un isomorphisme de groupes de $O(E)$ vers $O_n(\mathbb{R})$ et de $SO(E)$ vers $SO_n(\mathbb{R})$.

4.3 En dimension 2**THÉORÈME 4.17**

Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{déterminant } 1)$$

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{déterminant } -1),$$

où $\theta \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION 4.18 (Rotation d'angle θ)

On appelle $R(\theta)$ la rotation (vectorielle) d'angle θ . L'angle est bien défini modulo 2π .

PROPOSITION 4.19

Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$.

Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est donc commutatif ; il est isomorphe au groupe \mathbb{U} des nombres complexes de module 1.

PROPOSITION 4.20

Pour tout θ non nul modulo 2π , $S(\theta)$ est une réflexion : c'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $\cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2$.