

## DS 9 de mathématiques – Reprise

**1 Exercice – Loi du nombre de désintégrations**

1. Il n'y a pas besoin de donner la loi de  $N_n$  pour calculer son espérance : la linéarité suffit.
2. Ne pas oublier l'hypothèse d'indépendance pour dire qu'une somme de variables aléatoires suivant loi  $\mathcal{B}(p)$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ .
3. Pour obtenir un équivalent de  $\binom{n}{k}$ , à  $k$  fixé, quand  $n \rightarrow +\infty$ , on l'écrit sous forme polynomiale. La formule de Stirling fonctionne aussi mais c'est très peu adapté au problème.
4. Ne pas oublier le cas où  $\lambda$  est entier. Pour la rédaction, on a intérêt à écrire les inégalités à satisfaire et ensuite à distinguer selon que  $\lambda$  est entier ou non.

**2 Problème – Un calcul d'intégrales**

1. L'écriture sous forme trigonométrique des racines  $n$ -èmes d'un nombre complexe est une compétence basique. On pouvait ici les écrire comme les opposés des racines  $n$ -èmes de l'unité (car  $n$  est impair) mais ça complique plutôt la discussion sur les indices dans la suite.
2. Ne pas oublier de justifier qu'il n'y a pas de partie entière dans la décomposition en éléments simples. Pour le calcul, la formule avec dérivée du dénominateur simplifiait considérablement les choses.
3. RAS ; la question peut permettre de déterminer les constantes de la question précédente, si on n'a pas trouvé.
4. RAS
5. Les valeurs absolues dans le logarithme n'étaient pas nécessaires ici ; tous les arguments étant positifs.
6. (a) Le plus rapide est d'utiliser les relations coefficients-racines.  
(b) Des calculs parfois obscurs ; tout vient de ce que valent le cos et le sin de  $\pi/2 - \theta$ .  
On peut faire un dessin mais ça ne doit pas remplacer une justification.  
(c) Les explications sur la disparition du terme venant des logarithmes étaient souvent confuses.
7. En écrivant explicitement les angles qui interviennent pour un petit entier, on se rend compte qu'on peut les réécrire comme des angles multipliés de  $2k\pi/n$  (à  $\pi$  près). Cette remarque permet de faire très vite le calcul.  
Penser qu'un sujet ne cherche pas à piéger le candidat ; si on donne précisément cette formule, on devrait pouvoir l'utiliser rapidement.

### 3 Problème – Sur la décomposition LU

#### 3.1 Décomposition LU

- (a) Beaucoup d'incompréhensions sur la démarche de la démonstration (Analyse-Synthèse pour démontrer Unicité et Existence, au sein d'une récurrence). Le lien entre les  $L_{11}$  et  $U_{11}$  de l'énoncé, et la décomposition LU de  $M_{11}$  sont trop souvent non explicites.  
(b) RAS  
(c) Il s'agit essentiellement de définir les matrices à partir des formules trouvées aux questions précédentes. Nombreuses confusions logiques ; les deux questions précédentes ont montré l'unicité, pas l'existence.  
On aurait bien sûr pu rédiger les choses différemment et raisonner par équivalences mais ce n'est pas ce que le sujet propose.
2. On s'épargne une récurrence avec un produit par blocs adapté.

#### 3.2 Réduction à une matrice régulière

- (a) La question étant posée, on ne peut pas se contenter d'une référence à un résultat d'exercice, aussi connu soit-il. Reformuler la question en terme d'homothétie ne suffit pas non plus ; l'équivalence homothétie/matrice scalaire étant évidente. Chez les personnes qui ont réécrit la démonstration, beaucoup trop de maladroites pour un résultat élémentaire...  
(b) RAS
- (a) Le calcul de l'inverse peut se deviner au brouillon ; on le montre ensuite immédiatement par un produit par blocs. Faire appel à la formule de Cramer pour le calcul de l'inverse est peu adapté.  
(b) De nombreux arguments sont possibles ; en général, la question a été bien traitée.  
(c) Une question plus délicate. Les élèves ayant essayé et échoué ont souvent commis l'erreur de chercher  $U$  sous une forme trop particulière (colonne de  $x$  p. ex.), ce qui ne permet pas de conclure en général. Toujours faire attention quand on cherche à montrer l'existence d'un objet à ne pas trop imposer sur sa forme ; on risque de ne plus pouvoir le trouver...
5. Une récurrence est clairement adaptée. Et doit être écrite de façon convaincante. Trop souvent, il y a des confusions entre matrice inversible et matrice régulière ; et on oublie que les questions précédentes supposaient la matrice non scalaire (ce qui ne pose pas de difficultés mais doit être remarqué).

#### 3.3 Une application

6. Le plus simple est multiplier les facteurs  $L$  et  $U$  de la décomposition de  $M$  par une matrice diagonale et son inverse, convenablement choisies.
7. Avec l'indication, c'était essentiellement une question de cours.
8. Il suffit de rassembler ce qu'on a fait. Le cas où la matrice n'est pas dès le départ régulière a souvent été oublié.

## 4 Problème – Longueur maximale d’une suite extraite croissante

### 4.1 Majoration de $E(C_n)$

1. Ne pas négliger ce genre de questions pour bien comprendre de quoi on parle. Il est cependant raisonnable de ne pas traiter le cas  $n = 4$ , qui peut être un peu long si on s’y prend mal.  
Attention aux fausses symétries. Il n’y a pas de raisons pour que la loi de  $C_n$  soit symétrique sur l’intervalle  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (et elle ne l’est pas).
2. La rédaction est souvent confuse ; beaucoup rédigeant en faisant *comme si* on travaillait sur l’ensemble des  $k$ -listes sans répétition et pas sur l’ensemble des permutations.  
Selon les goûts, on peut faire un dénombrement de  $A^s$  ou préférer un argument probabiliste à base de formule des probabilités totales (sachant les valeurs, la probabilité est  $\frac{1}{k!}$ , donc...).
3. Pour être convaincant, on a intérêt à écrire l’évènement  $(C_n \geq k)$  comme une union des  $A^s$ , puis de traduire cela en calcul de probabilités.
4. Le lien entre  $P(C_n \geq \alpha e\sqrt{n})$  et  $P(C_n \geq k)$  était souvent peu explicite : ce sont les mêmes car  $C_n$  est à valeurs entières. Les personnes ayant écrit une inégalité ont très vraisemblablement fait un mauvais raisonnement : si  $y \geq x$ ,  $P(X \geq y) \leq P(X \geq x)$ ...
5. Le plus simple est d’utiliser la formule donnant  $e^x$  comme somme de sa série de Taylor.  
*On peut raisonnablement se demander si on pouvait l’utiliser sans preuve ; ce sera en tout cas clairement le cas aux concours.* Il faut ensuite être un peu soigneux sur les inégalités restantes.
6. Il faut séparer les valeurs de  $C_n$ . Le mieux est de prendre l’habitude d’écrire ces calculs en utilisant des indicatrices : c’est plus rapide et plus *probabiliste* que d’écrire des sommes.
7. Beaucoup de confusions. A  $\alpha$  fixé, le terme de droite tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ , mais si on fait tendre  $\alpha$  *trop vite* vers 1, le calcul ne marche plus. Il fallait trouver une formule pour  $\alpha_n$  tendant vers 1 suffisamment lentement ; il y avait plusieurs possibilités.

### 4.2 Minoration de $E(C_n)$

#### 8. Théorème d’Erdős-Szekeres.

- (a) Faire explicitement référence au principe des tiroirs. Ne pas sur-formaliser ces questions en introduisant des relations d’équivalence et des applications qui ne clarifient pas l’argument.
- (b) Assez souvent mal rédigé même si l’idée était manifestement comprise.

9. Bien vérifier que l’inégalité du théorème d’Erdős-Szekeres est satisfaite.

10. RAS

11. RAS