

## DM Bonus – Théories de l'intégration

On présente différentes méthodes, de plus en plus générales, pour définir l'intégrale d'une fonction.

### 1 Fonctions réglées

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est réglée<sup>1</sup> si elle est limite uniforme de fonctions en escalier sur  $[a, b]$ . On cherche à montrer l'équivalence suivante :

- i)  $f$  est réglée ;
- ii)  $f$  a une limite à gauche et à droite<sup>2</sup> en tout point  $x \in [a, b]$ .

1. **Démonstration de i)  $\implies$  ii).** On note  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions en escalier convergeant vers  $f$  en norme infinie. Soit  $x \in [a, b[$ .

- (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall y, z \in ]x, x + \delta] \cap [a, b], f_n(z) = f_n(y).$$

- (b) En déduire qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall y, z \in ]x, x + \delta] \cap [a, b], |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

- (c) En déduire<sup>3</sup> l'existence de  $\lim_{x^+} f$ .

On montrerait de même l'existence de  $\lim_{x^-} f$ , pour tout  $x \in ]a, b]$ .

Si  $x \in [a, b]$  et  $r > 0$ , on note  $B(x, r) = \{y \in [a, b] \mid |y - x| < r\}$ .

2. Pour tout  $x \in [a, b]$ , on se donne  $\delta_x > 0$ . Montrer le lemme de Lebesgue :

$$\exists r > 0, \forall y \in [a, b], \exists x \in [a, b] : B(y, r) \subset B(x, \delta_x).$$

3. **Démonstration de ii)  $\implies$  i).** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction vérifiant ii), soit  $\varepsilon > 0$ .

- (a) Montrer que pour tout  $x \in [a, b]$ , il existe  $\delta_x > 0$  tel que

$$\forall y, z \in B(x, \delta_x), ((y, z < x) \text{ ou } (y, z > x)) \implies |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

- (b) En déduire qu'il existe une subdivision  $\sigma = (u_k)_{k \in [0, N]}$  de  $[a, b]$  telle que

$$\forall k \in [0, N - 1], \forall y, z \in ]u_k, u_{k+1}[, |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

<sup>1</sup>L'intégrale sur  $[a, b]$  d'une telle fonction peut être définie par approximation, comme on a fait dans le cours pour les fonctions continues par morceaux.

<sup>2</sup>Seulement à droite en  $a$  et à gauche en  $b$ .

<sup>3</sup>On utilisera la caractérisation séquentielle de la limite et le critère de Cauchy.

(c) En déduire qu'il existe  $h \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$  telle que  $\|f - h\|_\infty \leq \varepsilon$ . Conclure.

#### 4. Exemples.

(a) Montrer que les fonctions continues par morceaux sont réglées.

(b) Montrer que les fonctions monotones sont réglées.

(c) Donner un exemple de fonction réglée  $f$  sur  $[0, 1]$  telle qu'il existe une suite décroissante  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$  de limite nulle vérifiant :

- i)  $\{r_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  est l'ensemble des points de discontinuité de  $f$ .
- ii)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]r_{2n+1}, r_{2n}[ , f(x) > 0$  et  $\forall x \in ]r_{2n}, r_{2n-1}[ , f(x) < 0$ .

## 2 Fonctions Riemann-intégrables

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{E}^-(f) = \{h \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \mid h \leq f\}$  et  $\mathcal{E}^+(f) = \{h \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \mid h \geq f\}$ .

On définit<sup>4</sup>  $I^-(f) = \sup \left\{ \int_a^b h \mid h \in \mathcal{E}^-(f) \right\}$  et  $I^+(f) = \inf \left\{ \int_a^b h \mid h \in \mathcal{E}^+(f) \right\}$ .

On dit que  $f$  est Riemann-intégrable si  $I^-(f) = I^+(f)$ . Dans ce cas, cette valeur commune est l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  et est notée  $\int_a^b f$ .

5. Montrer qu'une fonction Riemann-intégrable est bornée.

6. Montrer qu'une fonction réglée est Riemann-intégrable et que, pour une telle fonction, les deux notions d'intégrale coïncident.

7. Montrer que la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$  est Riemann-intégrable, mais qu'elle n'est pas réglée.

8. Montrer que la fonction  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  n'est pas Riemann-intégrable.

On appelle subdivision pointée de  $[a, b]$  la donnée  $(\sigma, \underline{t})$  d'une subdivision  $\sigma = (u_k)_{k \in [0, N]}$  de  $[a, b]$  et de  $\underline{t} = (t_0, \dots, t_{N-1})$  tels que pour tout  $k \in [0, N-1]$ ,  $t_k \in [u_k, u_{k+1}]$ . La somme de Riemann de  $f$  associée à la subdivision pointée  $(\sigma, \underline{t})$  est

$$S(f, \sigma, \underline{t}) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)(u_{k+1} - u_k).$$

On rappelle que le pas de la subdivision  $\sigma$  est  $\delta(\sigma) = \sup_{k \in [0, N-1]} \{u_{k+1} - u_k\}$ .

9. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $f$  est Riemann-intégrable ;
- ii) Il existe  $I \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour toute subdivision pointée  $(\sigma, \underline{t})$  de pas  $\delta(\sigma) \leq \delta$ ,  $|S(f, \sigma, \underline{t}) - I| \leq \varepsilon$ .

Dans ce cas, la valeur de  $I$  est  $\int_a^b f$ . De façon plus concise :  $\lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} S(f, \sigma, \underline{t}) = \int_a^b f$ .

<sup>4</sup>Conventionnellement,  $\inf \emptyset = +\infty$  et  $\sup \emptyset = -\infty$ .

### 3 Fonctions KH-intégrables

On appelle jauge sur  $[a, b]$  une fonction  $\delta$  sur  $[a, b]$  strictement positive. Une subdivision pointée  $(\sigma, \underline{t})$  sur  $[a, b]$  est  $\delta$ -fine si  $\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, u_{k+1} - u_k \leq \delta(t_k)$ .

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite KH-intégrable<sup>5</sup> s'il existe  $I \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une jauge  $\delta$  sur  $[a, b]$  tel que si  $(\sigma, \underline{t})$  est une subdivision pointée  $\delta$ -fine, alors  $|S(f, \sigma, \underline{t}) - I| \leq \varepsilon$ .

Dans ce cas,  $I$  est l'intégrale de  $f$  et est notée  $\int_a^b f$ .

10. Montrer qu'une fonction Riemann-intégrable est KH-intégrable et que, pour une telle fonction, les notions d'intégrale coïncident.
11. Montrer que la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$  est KH-intégrable, mais qu'elle n'est pas Riemann-intégrable. Déterminer son intégrale.
12. Montrer que  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  est KH-intégrable et déterminer son intégrale.
13. **Théorème fondamental de l'analyse.**

(a) Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $[a, b]$ .

Montrer que  $f'$  est KH-intégrable sur  $[a, b]$  et que  $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$ .

(b) Montrer qu'en général  $f'$  n'est pas Riemann-intégrable.

---

<sup>5</sup>D'après Ralph Henstock (1923-2007) et Jaroslav Kurweil (1926-2022).