

30 - Fonctions de deux variables

Jeremy Daniel

1 Topologie de \mathbb{R}^2 , continuité

1.1 Topologie de \mathbb{R}^2

NOTATION 1.1

On note $\|u\|$ la norme euclidienne d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, $\langle u | v \rangle$ le produit scalaire et $d(u, v) = \|u - v\|$ la distance entre deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 1.2 (Boule ouverte, boule fermée)

Soit $u \in \mathbb{R}^2$, soit $r > 0$. La boule ouverte $B(u, r)$ de centre u et de rayon r est définie par $B(u, r) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid d(u, v) < r\}$.

De même pour la boule fermée $\overline{B}(u, r)$, avec une inégalité large.

REMARQUE 1.3

En considérant $r = 0$, on peut aussi considérer \emptyset comme une boule ouverte et le singleton $\{u\}$ comme une boule fermée.

DÉFINITION 1.4 (Ouvert de \mathbb{R}^2)

Une partie $U \subset \mathbb{R}^2$ est ouverte si $\forall u \in U, \exists r > 0 : B(u, r) \subset U$.

EXERCICE 1.5

Montrer qu'une boule ouverte est ouverte.

EXERCICE 1.6

Montrer que l'ensemble des ouverts de \mathbb{R}^2 est stable par union quelconque et par intersection finie.

Montrer qu'une partie de \mathbb{R}^2 est ouverte ssi elle s'écrit comme union de boules ouvertes.

DÉFINITION 1.7 (Fermé de \mathbb{R}^2)

Une partie $F \subset \mathbb{R}^2$ est fermée si son complémentaire dans \mathbb{R}^2 est une partie ouverte.

DÉFINITION 1.8 (Convergence dans \mathbb{R}^2)

Une suite de vecteurs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^2 converge vers un vecteur u si $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_n, u) = 0$.

EXERCICE 1.9

Montrer qu'une partie F de \mathbb{R}^2 est fermée ssi toute suite convergente d'éléments de F a pour limite un vecteur de F .

1.2 Continuité

DÉFINITION 1.10 (Fonction continue de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R})

Soit A une partie de \mathbb{R}^2 , soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $u \in A$. On dit que f est continue en u si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall v \in A, d(u, v) < r \implies |f(v) - f(u)| \leq \varepsilon.$$

On dit que f est continue si elle est continue en tout point de A .

PROPOSITION 1.11 (Caractérisation séquentielle)

La fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $u \in A$ ssi pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ de limite u , la suite $(f(u_n))$ a pour limite $f(u)$.

REMARQUE 1.12

Une fonction $f = (f_1, f_2)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 est continue si ses deux composantes sont continues.

DÉFINITION 1.13 (Applications partielles)

Soit f une fonction de $A \subset \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R} . Si $x \in \mathbb{R}$, on peut considérer

$$A_{x,1} = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}.$$

L'application partielle de f , avec abscisse x , est $y \mapsto f(x, y)$, définie de $A_{x,1}$ dans \mathbb{R} . On peut de même geler l'ordonnée y .

ATTENTION !

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, on montre que toutes les applications partielles sont continues.

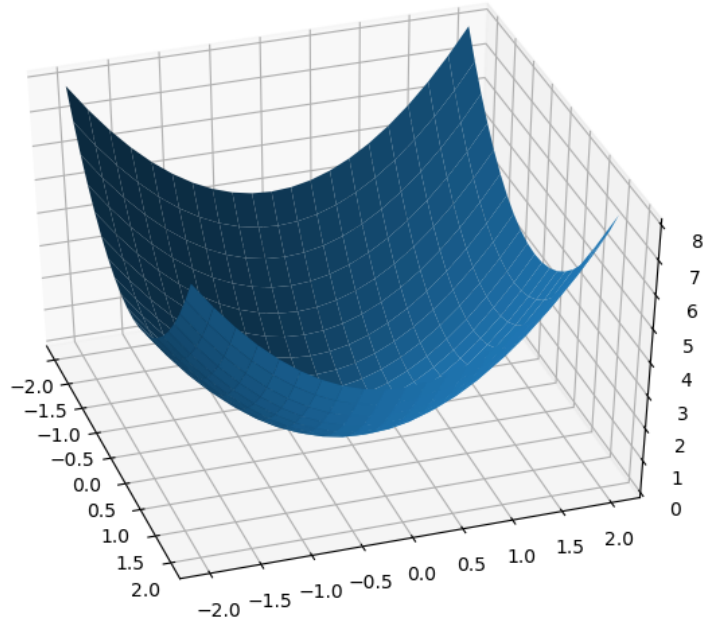
La réciproque est fautive. On note $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$

et $f(0, 0) = 0$. On vérifie que f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, que les applications partielles $y \mapsto f(0, y)$ et $x \mapsto f(x, 0)$ sont continues mais que f n'est pas continue en 0.

1.3 Représentations graphiques

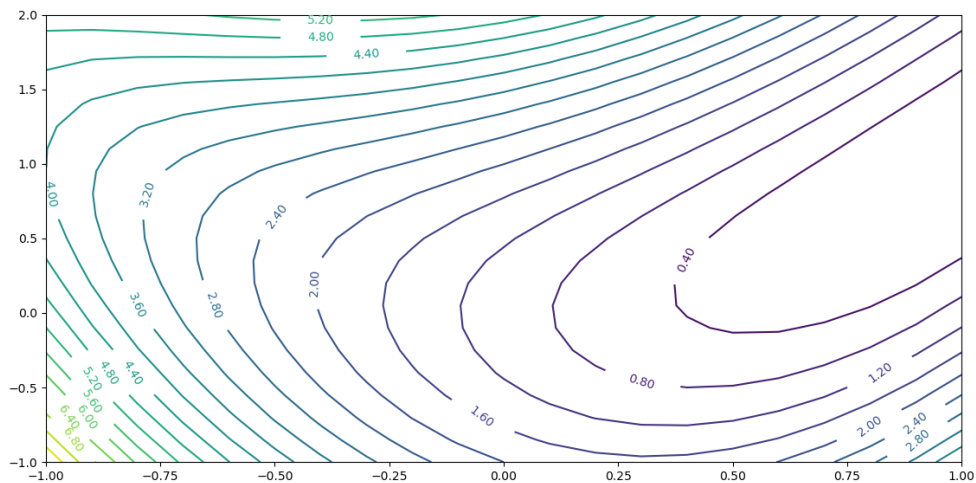
REMARQUE 1.14 (Représentation comme surface dans l'espace)

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on peut représenter son graphe dans l'espace : c'est l'ensemble des points de la forme $(x, y, f(x, y))$. Ci-dessous une représentation d'un parabolôïde – surface associée à la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ – sur le rectangle $] - 2, 2[\times] - 2, 2[$.



REMARQUE 1.15 (Représentation par lignes de niveau)

Plutôt que de chercher à représenter *toutes* les valeurs $f(x, y)$, on choisit uniquement certaines valeurs particulières et on rassemble les points (x, y) prenant ces valeurs communes. L'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y)$ est égal à une même valeur z est une *ligne de niveau* – c'est simplement l'ensemble $f^{-1}(z)$. En général, on représente ces lignes par un code couleur ou bien on indique la valeur commune le long de la ligne. Ci-dessous une représentations possible par lignes de niveau de la fonction $(x, y) \mapsto (1 - x)^2 + (y - x^2)^2$ sur le rectangle $] - 1, 1[\times] - 1, 2[$.



REMARQUE 1.16

Le problème de la représentation d'une fonction $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est très différent. Pour tout t , $c(t) = (x(t), y(t))$ est un point de \mathbb{R}^2 et on peut simplement représenter l'ensemble $\Gamma = \{(x(t), y(t))\}$ des valeurs prises par c .

Il y a cependant un inconvénient à ne représenter que les valeurs de c : on ne sait pas à quel t une valeur correspond. On peut numéroter certains points de l'arc Γ par le t correspondant pour visualiser la vitesse/le sens de parcours de Γ .

REMARQUE 1.17

Il est assez délicat de visualiser une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . On peut bien sûr représenter côte à côte ses deux composantes, qui sont des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} ; mais on perd la vue d'ensemble du comportement de la fonction.

Une autre possibilité est de représenter en chaque point de \mathbb{R}^2 une flèche d'origine ce point, correspondant à la valeur de la fonction en ce point. C'est ainsi que l'on représente le gradient d'une fonction.

2 Dérivées partielles

2.1 Dérivées partielles

DÉFINITION 2.1 (Dérivées partielles)

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 , soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, soit $(x_0, y_0) \in U$.

La première dérivée partielle de f en (x_0, y_0) – si elle existe – est la dérivée en x_0 de l'application partielle $x \mapsto f(x, y_0)$ (bien définie au voisinage de x_0).

De même pour la deuxième dérivée partielle.

NOTATION 2.2

On note $\partial_x f(x_0, y_0)$, $\partial_1 f(x_0, y_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ la première dérivée partielle de f en (x_0, y_0) . Notations analogues pour la deuxième dérivée partielle.

ATTENTION !

L'existence de dérivées partielles en (x_0, y_0) n'implique pas la continuité en ce point. Dans l'exemple donné plus haut (après la définition 1.13), f est identiquement nulle sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées; donc elle admet en $(0, 0)$ deux dérivées partielles nulles.

DÉFINITION 2.3 (Fonction de classe \mathcal{C}^1)

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et si les fonctions $(x, y) \mapsto \partial_1 f(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \partial_2 f(x, y)$ sont continues.

DÉFINITION 2.4 (Gradient)

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , le gradient de f , noté ∇f est défini par

$$\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)).$$

REMARQUE 2.5

On représente habituellement le gradient comme un *champ de vecteurs* : en tout point (x, y) de U , on place le vecteur $\nabla f(x, y)$ avec pour origine le point (x, y) .

DÉFINITION 2.6 (Dérivée selon un vecteur)

Si $u = (h, k)$ est un vecteur de \mathbb{R}^2 , la dérivée de f en (x_0, y_0) , selon le vecteur u est – si elle existe – la dérivée en $t = 0$ de la fonction $t \mapsto f((x_0, y_0) + tu)$.

On note $\partial_u f(x_0, y_0)$ cette dérivée directionnelle.

PROPOSITION 2.7

Avec les notations précédentes, si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , elle admet une dérivée selon tout vecteur u de \mathbb{R}^2 . De plus,

$$\partial_u f(x_0, y_0) = h\partial_1 f(x_0, y_0) + k\partial_2 f(x_0, y_0).$$

2.2 Approximation locale

DÉFINITION 2.8 (Notation $o(\|(h, k)\|)$)

Soit g une fonction définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 contenant $(0, 0)$, à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que $g(h, k) = o(\|(h, k)\|)$ en $(0, 0)$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 : \forall (h, k) \in U, \|(h, k)\| < r \implies |g(h, k)| \leq \varepsilon \|(h, k)\|.$$

REMARQUE 2.9

Dans ces conditions, g est continue en $(0, 0)$ et a des dérivées partielles en $(0, 0)$, avec $g(0, 0) = \partial_1 g(0, 0) = \partial_2 g(0, 0) = 0$.

THÉORÈME 2.10 (Développement limité à l'ordre 1)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On fixe $(x_0, y_0) \in U$. Alors,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)h + \partial_2 f(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

REMARQUE 2.11

Notons $z_0 = f(x_0, y_0)$. L'équation $z - z_0 = \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$ est celle d'un plan (affine) \mathcal{P} . L'équation précédente dit que le graphe de f est très bien approché par ce plan en (x_0, y_0) .

On dit que \mathcal{P} est le plan tangent de f en (x_0, y_0) .

REMARQUE 2.12

On peut encore écrire $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)$.

L'application $(h, k) \mapsto \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle$ est une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

On dira que cette application est la différentielle de f en (x_0, y_0) .

REMARQUE 2.13

Cette expression montre que, pour augmenter la quantité $f(x, y)$, il faut infinitésimalement suivre en tout point la direction du gradient de f .

REMARQUE 2.14

On peut aussi préférer le point de vue des quantités infinitésimales. A l'ordre 1,

$$f(x + dx, y + dy) \cong f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

3 Dérivée de fonctions composées

THÉORÈME 3.1 (Règle de la chaîne)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U un ouvert de \mathbb{R}^2 . Soit $(x, y) : I \rightarrow U, t \mapsto (x(t), y(t))$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

La fonction $\phi : t \mapsto f(x(t), y(t))$, définie de I dans \mathbb{R} est de classe \mathcal{C}^1 . Pour tout $t \in I$,

$$\phi'(t) = \partial_1 f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t))y'(t).$$

REMARQUE 3.2

Notons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Alors $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$. La règle de la chaîne se réécrit comme

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)) \mid \gamma'(t) \rangle.$$

REMARQUE 3.3

Avec des notations *plus physiciennes*,

$$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Ou encore :

$$\frac{d}{dt}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Cette écriture offre des avantages pour la mémorisation. Il y a cependant deux inconvénients :

- On n'écrit pas nécessairement où les quantités sont évaluées.
- L'usage de $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour désigner la première et deuxième dérivées partielles dépend d'un choix de noms pour les variables et peut entraîner des confusions. Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que signifie une expression du type $\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$?

REMARQUE 3.4

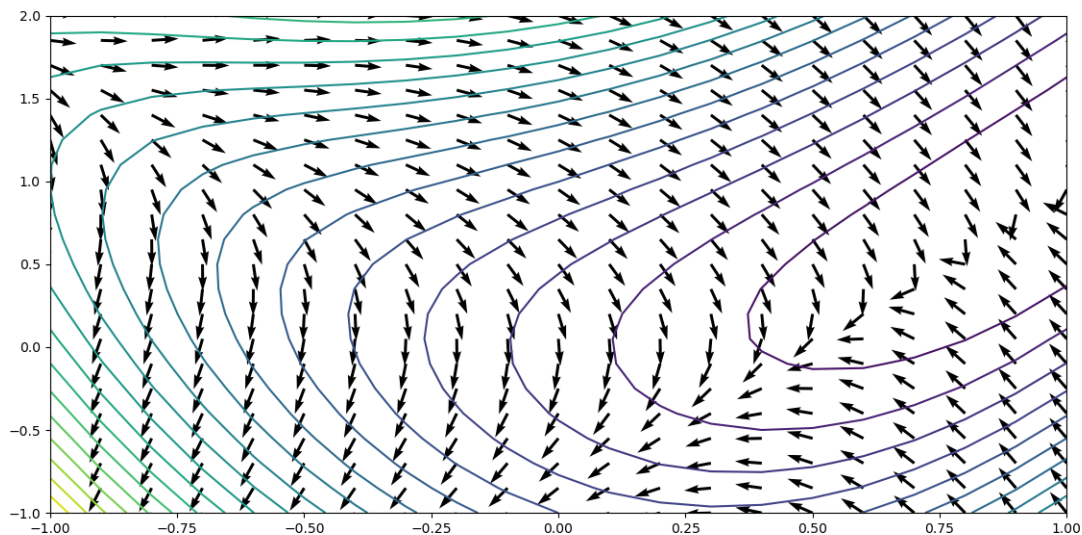
La fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ doit être comprise ainsi. On dispose d'une quantité f évoluant sur \mathbb{R}^2 – par exemple la température en le point de \mathbb{R}^2 . On se déplace dans \mathbb{R}^2 au moyen de l'arc $t \mapsto (x(t), y(t))$ et on étudie comment la quantité f évolue, quand on se déplace le long de cet arc.

PROPOSITION 3.5 (Gradient et lignes de niveau)

Si la fonction $t \mapsto f \circ \gamma(t)$ est constante, alors $\langle \nabla f(\gamma(t)) \mid \gamma'(t) \rangle = 0$.

REMARQUE 3.6

Graphiquement, ceci signifie que le gradient est en tout point orthogonal à la ligne de niveau passant par le point. Ci-dessous une représentation de cette situation ; pour un dessin plus clair, on a normalisé le gradient.



4 Recherche d'extrema

DÉFINITION 4.1 (Extremum local, extremum global)

Soient $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f admet un maximum global en $u \in A$ si

$$\forall v \in A, f(v) \leq f(u).$$

On dit que f admet un maximum local en $u \in A$ si

$$\exists r > 0, \forall v \in A \cap B(x, r), f(v) \leq f(u).$$

De même pour minimum global et local, en inversant les inégalités.

PROPOSITION 4.2

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Soit $(x_0, y_0) \in U$. Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) , alors $\partial_1 f(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0) = 0$.

REMARQUE 4.3

La condition peut encore s'écrire $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Un tel point (x_0, y_0) est un point critique de f .

ATTENTION !

Comme dans la recherche d'extrema d'une fonction de la variable réelle, plusieurs difficultés se présentent :

- Un point peut être critique pour f sans que f y réalise un extremum local. Considérer la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ en $(0, 0)$.
- Un extremum local peut ne pas être global.
- Si l'ensemble de définition de f n'est pas un ouvert, f peut présenter un extremum local en un point *sur le bord* de l'ensemble de définition.