29 - Équations différentielles linéaires

Jeremy Daniel

> In order to solve this differential equation you look at it till a solution occurs to you[1].
>
> G. Polya, *How to solve it*

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités sur les équations différentielles linéaires

DÉFINITION 1.1 (Équation différentielle linéaire)
Une équation différentielle linéaire (EDL) sur un intervalle I est une équation de la forme

$$(E) \quad a_r(t)y^{(r)} + a_{r-1}(t)y^{(r-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t),$$

d'inconnue $y \in \mathcal{D}^r(I, \mathbb{K})$, où

- pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, a_k est une fonction de I dans $\mathbb{K}$;
- b est une fonction de I dans $\mathbb{K}$.

DÉFINITION 1.2 (Ordre d'une EDL)
L'ordre de (E) est le plus grand entier k tel que a_k n'est pas la fonction identiquement nulle sur I.

REMARQUE 1.3
On suppose implicitement qu'il existe au moins une fonction a_k non identiquement nulle. L'ordre 0 étant de plus trivial, la théorie commence véritablement avec les équations d'ordre 1.

DÉFINITION 1.4 (Solution d'une EDL)
Une solution de (E) est une fonction $y \in \mathcal{D}^r(I, \mathbb{K})$, telle que :

$$\forall t \in I, a_r(t)y^{(r)}(t) + a_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t).$$

1. L'auteur caricature volontairement l'enseignement du *traditional mathematics professor*.

Remarque 1.5
Même quand les a_k et b sont à valeurs réelles, on pourra considérer les solutions y à valeurs complexes de (E). En cas d'ambiguïté, on précisera si les solutions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

Définition 1.6 (EDL homogène)
L'EDL (E) est homogène si son second membre b est identiquement nul.

Définition 1.7 (Équation homogène associée)
L'équation homogène associée à (E) est l'EDL obtenue en remplaçant le second membre b par 0. On notera

$$(E_h) \quad a_r(t)y^{(r)} + a_{r-1}(t)y^{(r-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0.$$

Théorème 1.8 (Structure des solutions)
Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h). Notons y_p une solution particulière[2] *de (E). Alors*
- *$\mathcal{S}_h$ est un ssev de $\mathcal{D}^r(I, \mathbb{K})$.*
- *$\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{D}^r(I, \mathbb{K})$ dirigé par $\mathcal{S}_h$.*

Proposition 1.9 (Principe de superposition)
Dans l'équation (E), supposons que b s'écrive $b = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i$, où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et où les b_i sont des fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, notons (E_i) l'EDL

$$(E_i) \quad a_r(t)y^{(r)} + a_{r-1}(t)y^{(r-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b_i(t).$$

Si pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, y_i est solution de (E_i), alors $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i$ est solution de (E).

Remarque 1.10
Ces deux résultats nous indiquent la marche à suivre pour résoudre une EDL :
- On résout l'EDL homogène associée ;
- On cherche une solution particulière, éventuellement en décomposant le second membre en une combinaison linéaire de fonctions plus simples, et en appliquant le principe de superposition.

Définition 1.11 (EDL mise sous forme normale)
Avec les notations précédentes, une EDL d'ordre r est mise sous forme normale si $a_r \equiv 1$.

2. Cette solution est *particulière* au sens où on la fixe ; elle ne se distingue pas *a priori* d'une autre solution. Il est à noter que l'existence d'une telle solution n'a rien d'évident en général.

Remarques 1.12
- Une EDL d'ordre r quelconque peut être mise sous forme normale en divisant par a_r, sur tout intervalle où a_r ne s'annule pas.
- Dans le reste de ce chapitre, on ne considère que des EDL mises sous forme normale.
- Les fonctions a_k et b seront toujours supposées continues.

2 EDL homogènes à coefficients constants

Dans cette section [3], on considère une EDL de la forme

$$(E) \quad y^{(r)} + a_{r-1} y^{(r-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

où les a_k sont des constantes dans $\mathbb{K}$.
On en cherche des solutions dans l'espace vectoriel $F = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Exercice 2.1
Montrer qu'une solution $y \in \mathcal{D}^r(I, \mathbb{K})$ de (E) est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition 2.2 (Polynôme caractéristique)
Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle (E) est $\chi = X^r + a_{r-1} X^{r-1} + \cdots + a_0$.

On note $D : F \to F, f \mapsto f'$ l'endomorphisme de dérivation.

Proposition 2.3
L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est $\operatorname{Ker}\big(\chi(D)\big)$.

On suppose maintenant que χ est un polynôme scindé dans $\mathbb{K}$ et on écrit $\chi = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{n_i}$, où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts.

Lemme 2.4
Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note $\mathcal{S}_i = \operatorname{Ker}\big((D - \lambda_i \operatorname{id}_F)^{n_i}\big)$.
- *On a la décomposition $\mathcal{S} = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{S}_i$;*
- *Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note $e_{\lambda_i} \in F$, définie par $e_{\lambda_i}(t) = e^{\lambda_i t}$. Alors,*

$$\mathcal{S}_i = \mathbb{K}_{n_i - 1}[X] e_{\lambda_i} = \Big\{ t \mapsto P(t) e^{\lambda_i t}, P \in \mathbb{K}_{n_i-1}[X] \Big\}.$$

Corollaire 2.5
L'espace $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est de dimension r.
Une base de $\mathcal{S}$ est donnée par les fonctions $f_{i,j} : t \mapsto t^j e^{\lambda_i t}$, où $i \in [\![1, k]\!]$ et $j \in [\![0, n_i - 1]\!]$.

3. Hors programme de 1ère année, sauf pour les ordres 1 et 2.

Exercice 2.6
On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mais on ne suppose plus χ scindé. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions réelles est de dimension r.
On en explicitera une base à partir de la factorisation de χ dans $\mathbb{C}[X]$.

Théorème 2.7 (Problème de Cauchy)
Pour tous $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, \dots, y_{r-1}) \in \mathbb{K}^r$, il existe une unique solution y de (E) telle que

$$\forall i \in [\![1, r]\!], y^{(i)}(t_0) = y_i.$$

3 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On considère une EDL $(E) : y' + a(t)y = b(t)$, où $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.
On note (E_h) l'équation homogène associée.

3.1 Résolution de l'équation homogène

Théorème 3.1 (Résolution de l'équation homogène)
Notons A une primitive de a sur I. L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h) vaut :

$$\mathcal{S}_h = \big\{t \mapsto C \exp\big(-A(t)\big), C \in \mathbb{K}\big\}.$$

Remarque 3.2
Une telle solution de (E_h) s'annule en un point ssi elle est identiquement nulle.

Remarque 3.3
Si a est constant, alors $A(t) = at$ et on retrouve les solutions de la section précédente.

3.2 Recherche d'une solution particulière

Théorème 3.4 (Existence d'une solution)
Sous l'hypothèse où a et b sont continues, l'équation (E) admet une solution.

Remarque 3.5
Avant d'entreprendre une méthode plus compliquée de recherche pratique de solution, se demander s'il n'y a pas une solution évidente. Un cas fréquent est celui où il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall t \in I, b(t) = \lambda a(t)$. Alors la fonction constante égale à λ est solution de (E).

3.2.1 Cas où a est constant.

Méthode 3.6
On s'intéresse au cas où a est constant et où b est de la forme $b : t \mapsto P(t)e^{wt}$, où P est une fonction polynomiale et $w \in \mathbb{C}$. On cherche alors une solution particulière sous la même forme, $y : t \mapsto Q(t)e^{wt}$, où Q est une fonction polynomiale.

On trouve que y est solution de (E) ssi $Q' + (w+a)Q = P$. On peut trouver une solution Q, de même degré que P si $w + a \neq 0$ et de degré $\deg P + 1$ si $w + a = 0$.

Remarque 3.7
Le principe de superposition et les formules d'Euler permettent de traiter le cas plus général où $b : t \mapsto P(t)\cos(at)e^{wt}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $w \in \mathbb{C}$ (et de même, en remplaçant cos par sin).

Remarque 3.8
La solution trouvée est à valeurs complexes. La proposition suivante pourra être utile.

Proposition 3.9 (Solutions complexes et réelles)
Si a est à valeurs réelles et si z est une solution de $(E) : z' + az = b(t)$, alors $\mathrm{Re}(z)$ est une solution de $(E_{\mathbb{R}}) : y' + ay = \mathrm{Re}\big(b(t)\big)$.
De même avec la partie imaginaire.

Exercice 3.10
Déterminer une solution particulière aux EDL suivantes :

1. $y' + y = te^t$;
2. $y' + 2y = e^{-2t}$;
3. $y' + iy = \cos t$;
4. $y' + 3y = (\sin t)e^{2t}$.

Remarque 3.11
Pour cette dernière équation, il est plus rapide de dire que $\sin t = \mathrm{Im}(e^{it})$, de trouver une solution particulière de $z' + 3z = e^{(2+i)t}$ et d'en prendre la partie imaginaire.

3.2.2 Variation de la constante

Méthode 3.12
On reprend le cas général où a et b sont des fonctions continues. Notons A une primitive de a. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$y : t \mapsto C(t)\exp\big(-A(t)\big),$$

où $C \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$. Cela revient à faire *varier la constante* C, utilisée pour décrire l'ensemble $\mathcal{S}_h$. Après calculs, on trouve que y est solution de (E) ssi C vérifie

$$\forall t \in I, C'(t) = b(t)\exp\big(A(t)\big),$$

ce qui ramène le problème à un calcul de primitive.

Attention !
Une erreur courante consiste à déterminer une fonction $t \mapsto C(t)$ qui convient et à conclure que cette fonction est solution de (E). Ne pas oublier de multiplier par $\exp\big(-A(t)\big)$, pour obtenir la fonction y.

Remarque 3.13
Cette méthode démontre le théorème d'existence de solution à (E).

Exercice 3.14
Déterminer les solutions réelles des EDL suivantes :

1. $y' + \frac{3}{t^2}y = \exp\left(\frac{3}{t}\right)$;
2. $y' - \frac{2}{t^3}y = \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$.

3.3 Problème de Cauchy

Définition 3.15 (Problème de Cauchy, ordre 1)
Un problème de Cauchy (d'ordre 1) est la donnée d'une équation (E) et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$, où $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Théorème 3.16 (Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy)
Soient $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution y de (E) telle que $y(t_0) = y_0$.

Proposition 3.17 (Cas particulier où a et b sont constants)
Soient $a, b \in \mathbb{K}$, soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution à l'EDL $y' + ay = b$ telle que $y(t_0) = y_0$. Elle est donnée par

$$y : t \mapsto \frac{b}{a} + (y_0 - \frac{b}{a})e^{-a(t-t_0)} \text{ si } a \neq 0.$$
$$y : t \mapsto y_0 + b(t - t_0) \text{ si } a = 0.$$

4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

On note $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$, où $a, b \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
On note (E_h) l'équation homogène associée.

Remarque 4.1
On se limite donc aux cas où les coefficients a et b sont constants. Cependant, le second membre peut varier avec t.

4.1 Résolution de l'équation homogène

Théorème 4.2 (Solutions à valeurs complexes de l'équation homogène)
Notons $\mathcal{S}_{h,\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions à valeurs complexes de (E_h).
- *Si χ a deux racines complexes distinctes r_1 et r_2, on a*
$$\mathcal{S}_{h,\mathbb{C}} = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2)\}.$$
- *Si χ a une racine double r, on a*
$$\mathcal{S}_{h,\mathbb{C}} = \{t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2)\}.$$

Corollaire 4.3 (Solutions à valeurs réelles de l'équation homogène, quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
On suppose que $a, b \in \mathbb{R}$ et on note $\mathcal{S}_{h,\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions à valeurs réelles de (E_h).

- *Si χ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, on a*

$$\mathcal{S}_{h,\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)\}.$$

- *Si χ a une racine réelle double r, on a*

$$\mathcal{S}_{h,\mathbb{R}} = \{t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)\}.$$

- *Si χ n'a pas de racine réelle, soit $z = u + iv$, une de ses deux racines (conjuguées complexes) écrite sous forme algébrique, où $(u, v) \in \mathbb{R}^2)$. Alors,*

$$\mathcal{S}_{h,\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda \cos(vt)e^{ut} + \mu \sin(vt)e^{ut}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.\}.$$

4.2 Recherche d'une solution particulière

Théorème 4.4 (Existence d'une solution)
Sous l'hypothèse où f est continue, l'équation (E) admet une solution.

Méthode 4.5
Comme pour l'équation d'ordre 1, on s'intéresse au cas où $f : t \mapsto P(t)e^{wt}$, où P est une fonction polynomiale et $w \in \mathbb{C}$. On cherche une solution particulière sous la même forme, $y : t \mapsto Q(t)e^{wt}$, où Q est une fonction polynomiale.
On trouve que y est solution de (E) ssi $Q'' + (2w + a)Q' + (w^2 + aw + b)Q = P$.
On peut trouver une solution Q, de degré :

- $\deg P$ ssi $w^2 + aw + b \neq 0$ ssi w n'est pas racine de χ ;
- $\deg P + 1$ ssi $w^2 + aw + b = 0$ et $2w + a \neq 0$ ssi w est racine simple de χ ;
- $\deg P + 2$ ssi w est racine double de χ.

Remarque 4.6
Ce qui a été dit dans le cas de l'ordre 1 reste valable. Les formules d'Euler et le principe de superposition permettent de traiter les cas où on a un facteur $\cos(at)$ ou $\sin(at)$ au lieu/en plus du facteur exponentiel.
Quand a et b sont réels et qu'on cherche une solution réelle, on pourra écrire le second membre comme la partie réelle/imaginaire d'une fonction de la forme $t \mapsto P(t)e^{wt}$, plutôt que d'utiliser les formules d'Euler.

Exercice 4.7
Trouver une solution particulière des EDL suivantes :

1. $y'' + y' + y = \cos t$;
2. $y'' + y' + y = e^t \cos t$;
3. $y'' - 4y' + y = (t^2 + t)e^{2t} + te^t$.

Proposition 4.8 (Cas particulier du second membre constant)
Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$. Une solution particulière à l'équation $y'' + ay' + by = c$ est donnée par

- $y : t \mapsto \dfrac{c}{b}$ *si* $b \neq 0$ *;*
- $y : t \mapsto \dfrac{c}{a}t$ *si* $b = 0$ *et* $a \neq 0$ *;*
- $y : t \mapsto \dfrac{c}{2}t^2$ *si* $(a,b) = (0,0)$.

4.3 Problème de Cauchy

Définition 4.9 (Problème de Cauchy, ordre 2)
Un problème de Cauchy (d'ordre 2) est la donnée d'une équation (E) et de conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = v_0$, où $t_0 \in I$ et $(y_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$.

Théorème 4.10 (Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy)
Si $(t_0, y_0, v_0) \in I \times \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution y au problème de Cauchy.

Exercice 4.11
Démontrer ce théorème, en utilisant les résultats établis sur l'équation homogène associée.