

28 – Construction de l'intégrale

Jeremy Daniel

1 Intégrale des fonctions en escalier

Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1.1 Fonctions en escalier

DÉFINITION 1.1 (Subdivision)

Une subdivision σ du segment $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (u_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ telle que

$$a = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = b.$$

Le pas de σ , noté $\delta(\sigma)$, est l'écart maximal pris entre deux points de la subdivision :

$$\delta(\sigma) = \max\{u_{k+1} - u_k \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}.$$

DÉFINITION 1.2 (Subdivision régulière)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit une subdivision $\sigma = (u_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de $[a, b]$ par $u_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

On parle de subdivision régulière. Son pas est $\frac{b-a}{n}$.

DÉFINITION 1.3 (Fonctions en escalier)

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (u_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de $[a, b]$ telle que f est constante sur chaque intervalle $]u_k, u_{k+1}[$, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

REMARQUE 1.4

Une telle subdivision est dite adaptée à f .

NOTATION 1.5

On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier à valeurs dans \mathbb{K} sur $[a, b]$.

REMARQUE 1.6

Si une subdivision $\sigma = (u_k)$ est adaptée à une fonction f en escalier, les valeurs de f prises en u_k peuvent être arbitraires.

EXEMPLES 1.7

- Une fonction constante sur $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1$ si $x = \frac{a+b}{2}$ et 0 sinon. C'est une fonction en escalier. Si σ_n est la subdivision régulière de pas $\frac{b-a}{n}$, σ_n est adaptée à f si, et seulement si n est pair.
- La restriction à $[a, b]$ de la fonction partie entière est en escalier. On peut prendre comme subdivision adaptée la suite croissante formée de a , b et des entiers appartenant à $[a, b]$.

LEMME 1.8

Si f et g sont des fonctions en escalier, il existe une subdivision adaptée à f et à g .

COROLLAIRE 1.9

L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$.

REMARQUE 1.10

$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$ engendré par les fonctions caractéristiques des segments : $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) = \text{Vect}(\chi_{[c,d]} \mid a \leq c \leq d \leq b)$.

ATTENTION !

Il faut inclure les fonctions caractéristiques des segments réduits à un point.

1.2 Intégrale des fonctions en escalier

DÉFINITION 1.11 (Intégrale des fonctions en escalier)

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (u_k)_{k=0}^n$ une subdivision adaptée à f .

L'intégrale de f , notée $\int_a^b f$ est définie par $\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(u_{k+1} - u_k)$, où f_k est la valeur prise par f sur $]u_k, u_{k+1}[$.

REMARQUE 1.12

Il vaut vérifier que cette quantité ne dépend pas de la subdivision adaptée à f qu'on a choisie.

REMARQUE 1.13

Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cette définition est conforme à l'interprétation de l'intégrale comme aire (algébrique) délimitée par la courbe représentative de f .

PROPOSITION 1.14 (Inégalité triangulaire)

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Alors, $|f|$ est aussi en escalier et $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

PROPOSITION 1.15 (Linéarité)

L'application $I : \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $I(f) = \int_a^b f$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

REMARQUE 1.16

C'est l'unique forme linéaire L sur $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ telle que $L(\chi_{[c, d]}) = d - c$, pour tous $c \leq d$.

PROPOSITION 1.17 (Positivité et croissance)

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

- Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f \geq 0$.
- Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

PROPOSITION 1.18 (Relation de Chasles)

Soit c un point de $]a, b[$ et soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Alors les restrictions de f à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont en escalier et

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

2.1 Norme infinie sur l'ensemble des fonctions continues

DÉFINITION 2.1 (Norme infinie)

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. La norme infinie (ou norme uniforme) de f est le réel, noté $\|f\|_\infty$, défini par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

REMARQUE 2.2

$\|f\|_\infty$ est bien définie si f (et donc $|f|$) est continue car elle est alors bornée sur le segment $[a, b]$. De plus, on sait qu'il existe dans ce cas un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$.

DÉFINITION 2.3 (Convergence en norme infinie)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction bornées sur $[a, b]$. Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. On dit que la suite (f_n) converge vers f en norme infinie (ou converge uniformément vers f) si $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

REMARQUE 2.4

C'est équivalent à la formule suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction f_n se rapproche donc uniformément de la fonction f .

THÉORÈME 2.5 (Approximation uniforme par les fonctions en escalier)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telle que (f_n) converge vers f en norme infinie.

REMARQUE 2.6

Le résultat suivant est un autre résultat d'approximation uniforme, cette fois par des polynômes. Il est au programme de 2ème année et n'est pas utilisé dans la suite du chapitre.

THÉORÈME 2.7 (Weierstrass)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Il existe une suite $(f_n)_n$ d'applications polynomiales sur $[a, b]$ telle que (f_n) converge vers f en norme infinie.

2.2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

DÉFINITION 2.8 (Fonction continue par morceaux sur un segment)

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (u_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction $f|_{]u_k, u_{k+1}[}$ est continue et admet un prolongement par continuité au segment $[u_k, u_{k+1}]$.

Une telle subdivision est dite adaptée à f .

REMARQUE 2.9

Autrement dit, on demande que $f|_{]u_k, u_{k+1}[}$ admet une limite finie à gauche en u_k et une limite finie à droite en u_{k+1} . Les valeurs de f en les points u_k de la subdivision peuvent être arbitraires.

DÉFINITION 2.10 (Fonction continue par morceaux)

Si I est un intervalle de \mathbb{R} et si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, on dit que f est continue par morceaux si la restriction de f à tout segment contenu dans I est une fonction continue par morceaux sur ce segment.

EXEMPLES 2.11

- Une fonction en escalier sur $[a, b]$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.
- La fonction f définie de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} par $f(x) = 1/x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas une fonction continue par morceaux : elle n'admet pas de limite finie à droite en 0.
- La fonction $g : x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$, définie sur \mathbb{R}_+^* est continue par morceaux. En effet, toute restriction de g à un segment $[a, b]$ contenu dans \mathbb{R}_+^* est une fonction en escalier.

PROPOSITION 2.12

Une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ a un nombre fini de points de discontinuités et est bornée.

NOTATION 2.13

On note $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. C'est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$.

THÉORÈME 2.14 (Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telle que (f_n) converge vers f en norme infinie.

LEMME 2.15

Soient $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a, b]$. On suppose que les deux suites convergent en norme infinie vers une même fonction bornée f . Alors les deux suites $\left(\int_a^b f_n\right)_n$ et $\left(\int_a^b g_n\right)_n$ sont convergentes et ont la même limite.

DÉFINITION 2.16 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux)

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. On considère $(f_n)_n$ une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui converge vers f en norme infinie.

L'intégrale de f sur $[a, b]$, notée $\int_a^b f$, est la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n$.

DÉFINITION 2.17 (Moyenne d'une fonction)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$. La moyenne de f est le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

2.3 Propriétés

PROPOSITION 2.18

On a les propriétés suivantes usuelles de l'intégration :

- **Inégalité triangulaire** : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

Alors, $|f|$ est aussi continue par morceaux et $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

- **Linéarité** : L'application $I : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ définie par $I(f) = \int_a^b f$ est une forme linéaire sur $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.
- **Positivité et croissance** : Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

- Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f \geq 0$.

- Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

- **Relation de Chasles** : Soit c un point de $]a, b[$ et soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors les restrictions de f à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont continues par morceaux et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

PROPOSITION 2.19 (Stricte positivité de l'intégrale)

Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$.

Alors, $\int_a^b f = 0$ si, et seulement si f est nulle.

ATTENTION !

Cette propriété est fautive pour les fonctions continues par morceaux : penser à la fonction indicatrice du singleton $\{0\}$ sur $[0, 1]$.

PROPOSITION 2.20 (Intégrale des fonctions à valeurs complexes)

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et à valeurs complexes. On note $u = \operatorname{Re} f$ et $v = \operatorname{Im} f$.

– f est continue par morceaux ssi u et v sont continues par morceaux.

$$- \int_a^b f = \int_a^b u + i \int_a^b v.$$

$$- \int_a^b \bar{f} = \overline{\int_a^b f}.$$

PROPOSITION 2.21

L'application $B : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}) \times \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $B(f, g) = \int_a^b fg$ est une application bilinéaire symétrique positive ; c'est-à-dire que pour toutes fonctions f, f_2, g, g_2 dans $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- $B(f, f) \geq 0$;
- $B(f, g) = B(g, f)$;
- $B(\lambda f + \mu f_2, g) = \lambda B(f, g) + \mu B(f_2, g)$;
- $B(f, \lambda g + \mu g_2) = \lambda B(f, g) + \mu B(f, g_2)$.

REMARQUE 2.22

La restriction de B à $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est définie positive : on a $B(f, f) > 0$ si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) - \{0\}$. On dira que B définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

COROLLAIRE 2.23 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$. On a $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$.

COROLLAIRE 2.24 (Cas d'égalité pour les fonctions continues)

Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

On a l'égalité $\left(\int_a^b fg\right)^2 = \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$ ssi f et g sont colinéaires.