

## Equations différentielles linéaires

## 1 Équations différentielles linéaires - Pratique

**EXERCICE 1.** ○○○ *Ordre 1, équation homogène*

Résoudre :

1.  $y' = xy$ ;

2.  $y' = -\frac{x}{x^2-1}y$ ;

3.  $y' = \frac{1}{x}y$ .

**EXERCICE 2.** ♣ – ●○○ *Ordre 1, équation générale*

Résoudre :

1.  $y' - 2y = \sin(2x)$ ;

4.  $y' + y = \arctan(e^x)$ ;

2.  $y' + y = xe^{3x} \cos x$ ;

5.  $y' = \frac{1}{\tan x}y + \tan^2 x$ ;

3.  $y' = \frac{2}{x}y + \frac{x}{x-1}$ ;

6.  $y' - \frac{1}{x \ln x}y = -\frac{1}{x^2 \ln x}(\ln x + 1)$ .

**EXERCICE 3.** ♣ – ●○○ *Ordre 2, coefficients constants, équation homogène*Résoudre sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $y'' + 2y' - 3y = 0$ , avec  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$  ;

2.  $y'' + 2y' + 4y = 0$  ;

3.  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .

Résoudre sur  $\mathbb{C}$  :

4.  $y'' + 9y = 0$ , avec  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = i$  ;

5.  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

**EXERCICE 4.** ♣ – ●○○ *Ordre 2, coefficients constants, équation générale*

Résoudre :

1.  $y'' + 2y' + 5y = \operatorname{ch} x$  ;

4.  $y'' - 7y' + 12y = e^{3x} \cos(3x)$  ;

2.  $y'' + y = \cos^3 x$  ;

5.  $y'' + 9y = \cos(3x)$  ;

3.  $y'' - 7y' + 12y = xe^{3x}$  ;

6.  $y'' - 2y' + y = e^x \cos x$ .

**EXERCICE 5.** ◇ – ●○○ *Phénomène de résonance*Soit  $\omega_0 > 0$ . Donner suivant la valeur de  $\omega > 0$  la solution de l'équation différentielle

$$y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega x)$$

telle que  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$ .

## 2 Équations différentielles linéaires - Théorie

**EXERCICE 6.** ♣ – ●○○ *Solutions avec deux valeurs prescrites*

Soit  $L > 0$ . Pour quelles valeurs de  $\omega > 0$  existe-t-il une solution  $y$  non nulle à l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 y = 0$ , telle que  $y(0) = y(L) = 0$  ?

**EXERCICE 7.** ◇ – ●○○ *Une équation intégrale*

Déterminer les fonctions  $y$  continues sur  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, 2y(x) = 3x \int_0^x y(t) dt$ .

**EXERCICE 8.** ●○○ *Un système différentiel*

Montrer qu'il existe un unique couple  $(x, y)$  de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  tel que  $x(0) = 1, y(0) = 0$ , et  $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 6y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$ .

**EXERCICE 9.** ◇ – ●●○ *Équations différentielles non linéaires*

Déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes :

1.  $y' = y^2$  ;
2.  $y' = 1 + y^2$  ;
3.  $y' = y(y + 1)$ .

**EXERCICE 10.** ♣/◇ – ●●○ *Presque des équations différentielles*

1. Déterminer les fonctions  $y$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = y(2 - x)$ .
2. Déterminer les fonctions  $y$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(-x) = -2(x + 1)e^x$ .
3. Déterminer les fonctions  $y$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = y(0) + y(1)$ .

**EXERCICE 11.** ♣ – ●●○ *Changement de variable*

On cherche à déterminer les fonctions  $y$  définies de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ , solutions de l'équation différentielle

$$(E) x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

Si  $y$  est une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on définit la fonction  $z$  sur  $\mathbb{R}$  par  $z : t \mapsto y(e^t)$ .

1. A quelle condition nécessaire et suffisante sur  $z$ ,  $y$  est-elle solution de (E) ?
2. En déduire les solutions de (E).

**EXERCICE 12.** ●●○ *Passage par les complexes*

On cherche les couples  $(x, y)$  de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$(E) \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

Si  $(x, y)$  est un couple de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , on pose  $z : t \mapsto x(t) + iy(t)$ .

1. Montrer que  $(x, y)$  est solution de (E) ssi  $z$  est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, que l'on précisera.
2. Conclure.

**EXERCICE 13.** ♣/◇ - ●●●○ Où est l'équation différentielle ?

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\lim_{+\infty} (f + f') = 0$ .

Montrer que  $\lim_{+\infty} f = 0$ .

**EXERCICE 14.** ♣ - ●●●○ Changement de variable et raccordement

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 0$$

sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $I$  un intervalle ne contenant pas 0.

1. Montrer que  $y$  est une solution de  $(E)$  sur  $I$  ssi  $z : x \mapsto y\left(\frac{1}{x}\right)$  est solution d'une équation différentielle  $(E')$  que l'on précisera.
2. En déduire les solutions de  $(E)$  sur  $I$ .
3. Déterminer les solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 15.** ♣/◇ - ●●●○ Conditions pour solutions bornées

Déterminer l'ensemble des couples  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  pour lesquels toutes les solutions à valeurs complexes de

$$y'' + \alpha y + \beta = 0$$

sont bornées.

**EXERCICE 16.** ♣/◇ - ●●●● Une inéquation différentielle

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable, telle que  $f''$  est continue. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) \geq 0.$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0.$$

**EXERCICE 17.** ◇ - ●●●● Une solution bornée et périodique

Soit  $g$  une fonction continue  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe une solution bornée à

$$y' - y = g$$

et que celle-ci est  $2\pi$ -périodique.

## Indications

**Exercice 5.** Il faudra distinguer le cas où  $\omega = \omega_0$ .

**Exercice 7.** Raisonner par analyse-synthèse. Si  $y$  est une solution, pourquoi est-elle dérivable ? Quelle équation différentielle vérifie-t-elle ?

**Exercice 9.** Pour 1., on pourra admettre que si  $y$  n'est pas identiquement nulle, alors elle ne s'annule pas. De même pour 3., on pourra admettre que si  $y$  n'est pas constante égale à 0 ou  $-1$ , elle ne prend jamais ces valeurs.

**Exercice 10.** Pour 1. et 2., dériver l'équation après avoir justifié. Pour 3., raisonner par analyse-synthèse.

**Exercice 13.** En notant  $g = f + f'$ ,  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y + y' = g$ , donc s'exprime en fonction de  $g$ . On aura besoin de la définition rigoureuse de limite.

**Exercice 15.** Distinguer selon que le polynôme caractéristique a une ou deux racines.

**Exercice 16.** A  $x$  fixé, considérer  $g(t) = f(t) \cos(x - t)$ .

**Exercice 17.** La variation de la constante donne la forme d'une solution  $f$ . Évaluer  $f$  en les multiples de  $2n\pi$  pour voir à quelle condition la suite des valeurs est bornée.