

## Fonctions de deux variables

## 1 Fonctions de deux variables

**EXERCICE 1.** ●○○ *Calcul sur les gradients*

Soient  $f$  et  $g$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , soit  $\phi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Exprimer simplement les gradients de  $\alpha f + \beta g$ ;  $f g$ ;  $\frac{f}{g}$  (si  $g$  ne s'annule pas) et  $\phi \circ f$ .

**EXERCICE 2.** ●○○ *Dérivées partielles de la norme*

Montrer que la fonction norme  $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$  n'admet pas de dérivée partielle en  $(0, 0)$ . Montrer que sa restriction à  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et calculer ses dérivées partielles.

**EXERCICE 3.** ●○○ *Étude en  $(0, 0)$* 

On définit  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f(x, y) = y$  sinon.

1. Montrer que  $f$  admet des dérivées directionnelles en  $(0, 0)$  selon tout vecteur.
2.  $f$  est-elle continue en  $(0, 0)$  ?

**EXERCICE 4.** ●○○ *Dérivées de composées*

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . On note  $p = \partial_1 f$  et  $q = \partial_2 f$ . Exprimer en fonction de  $p$  et  $q$  les dérivées par rapport à  $x$  et  $y$  de

1.  $g_1(x, y) = f(x - y, x + y)$
2.  $g_2(x, y) = f(y, x)$
3.  $g_3(x, y) = x^2 f(2xy, xe^y)$

**EXERCICE 5.** ●●○ *Fonctions à gradient nul*

1. Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\nabla f = 0$ . Montrer que  $f$  est constante.
2. Donner un exemple d'ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$  et de fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  non constante telle que  $\nabla f = 0$ .

**EXERCICE 6.** ●●○ *Fonctions homogènes*

Une fonction  $g$  continue de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  est homogène de degré  $r$  si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, g(tx, ty) = t^r g(x, y).$$

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que si  $f$  est homogène de degré  $r$ , alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré  $r - 1$ .
2. Montrer que  $f$  est homogène de degré  $r$  ssi, en notant  $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, y)$  :

$$\langle \nabla f | I \rangle = r f.$$

**EXERCICE 7.** ●●○ *Résolution d'équations aux dérivées partielles par changement de variables*

1. Résoudre  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$  par le changement de variables  $(u, v) = (x + y, x - y)$ .
2. Résoudre  $y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial y}$  par un passage en coordonnées polaires.
3. Résoudre sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  :  $x \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial y}$  par le changement de variables  $(x, y) = \left(\frac{u}{v}, \frac{v^2}{u}\right)$ .

**EXERCICE 8.** ●●○ *Fonction taux d'accroissement*

Soit  $g$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On définit  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y ; f(x, y) = g'(x) \text{ si } x = y.$$

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
2. Calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, x)$ .

**EXERCICE 9.** ●●○ *Calcul d'extrema*

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1.  $f_1(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$
2.  $f_2(x, y) = 5x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y$
3.  $f_3(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy$

**EXERCICE 10.** ●●○ *Extrema sur un fermé*

Soit  $f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$  et  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$ .

1. Représenter  $D$ .
2. Déterminer les points critiques de  $f$  en l'intérieur de  $D$  (= ensemble des points contenus dans une boule ouverte contenue dans  $D$ )
3. On admet que  $f$  admet un maximum et un minimum sur  $D$ . Les déterminer.

**EXERCICE 11.** ●●○ *Points critiques d'une fonction convexe*

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\forall p, q \in \mathbb{R}^2, \langle \nabla f(p) - \nabla f(q) \mid p - q \rangle \geq 0$ .

Montrer qu'un point critique de  $f$  est un minimum.