

Logique et raisonnements

1 Logiques, quantificateurs

EXERCICE 1. $\diamond - \circ \circ \circ$ Calcul propositionnel

Soient P , Q et R des assertions. Montrer que les assertions suivantes sont vraies :

1. $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;
2. $Q \implies (P \implies Q)$;
3. $(P \implies Q) \implies ((P \wedge R) \implies (Q \wedge R))$.

EXERCICE 2. $\diamond - \bullet \circ \circ$ Quantificateurs et connecteurs

Soit E un ensemble, soient $P(x)$ et $Q(x)$ des prédicats en la variable $x \in E$. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies. Justifier.

1. $\forall x \in E, (P(x) \wedge Q(x)) \iff (\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))$;
2. $\exists x \in E, (P(x) \wedge Q(x)) \iff (\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))$;
3. $\forall x \in E, (P(x) \vee Q(x)) \iff (\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$;
4. $\exists x \in E, (P(x) \vee Q(x)) \iff (\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))$.

EXERCICE 3. $\bullet \circ \circ$ Traduction formelle

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Traduire formellement les assertions suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante; | 4. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle; |
| 2. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'annule au moins une fois; | 5. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite majorée; |
| 3. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'annule une infinité de fois; | 6. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. |

EXERCICE 4. $\bullet \circ \circ$ Négation d'assertions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Déterminer la signification des assertions suivantes, puis les nier :

- | | |
|---|---|
| 1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$; | 3. $\forall x, y \in I, (x \leq y) \implies (f(x) \leq f(y))$; |
| 2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I : f(x) = y$; | 4. $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I, f(x) \leq M$. |

EXERCICE 5. $\bullet \bullet \circ$ Fonction nulle part monotone

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire une assertion mathématique traduisant le fait que f n'est monotone sur aucun segment $[a, b]$, avec $a < b$.

EXERCICE 6. ●●○ Polynômes et entiers

Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Écrire une implication affirmant que si P est à coefficients entiers, alors sa valeur prise en un entier quelconque est un entier.
La réciproque de cette implication est-elle vraie?

EXERCICE 7. ♣/◇ – ●●○ Uniforme continuité

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue si

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

On dit que f est uniformément continue si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

1. Montrer qu'une fonction uniformément continue est continue.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

2 Modes de raisonnement**EXERCICE 8. ◇ – ●○○ Un réel vraiment petit**

Soit x un réel positif. On suppose que : $\forall \epsilon > 0, x < \epsilon$.
Montrer que $x = 0$.

EXERCICE 9. ◇ – ●○○ Somme de fonctions paire et impaire

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire d'une unique façon comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

EXERCICE 10. ♣ – ●●○ Racines d'entiers

1. Soit p un nombre premier, soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que $\sqrt[n]{p}$ est un nombre irrationnel.
2. Soit $n \geq 2$ un entier, qui n'est pas un carré parfait. Montrer que $\sqrt{n}$ est irrationnel.

EXERCICE 11. ♣ – ●●○ Une équation fonctionnelle

On cherche à déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xf(x) + y^2 + f(xy) = f(x+y)^2 - f(x)f(y).$$

On procède par analyse synthèse.

1. Soit f une fonction solution.
 - (a) Déterminer $f(0)$.
 - (b) En déduire que $\forall y \in \mathbb{R}, f(y)^2 = y^2$.
 - (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.
2. Conclure.

EXERCICE 12. ●●○ D'autres décompositions

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que f s'écrit $f = g + c$, où $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue est telle que $\int_0^1 g(t) dt = 0$ et $c \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f s'écrit $f = g + h$, où $h : x \mapsto \alpha x + \beta$ est une fonction affine et où $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue est telle que, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 (at + b)g(t) dt = 0$.
3. Montrer que les deux décompositions précédentes sont uniques et préciser les valeurs des fonctions et constantes intervenant dans ces décompositions.

EXERCICE 13. ♣/◇ – ●●○ Puissance d'irrationnels

On considère le réel $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

1. Que vaut $x^{\sqrt{2}}$?
2. En déduire qu'on peut trouver deux nombres irrationnels α et β tels que α^β est rationnel.

3 Récurrences

EXERCICE 14. ○○○ Inégalité de Bernoulli

Soit $x \geq 0$ un réel. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (1+x)^n \geq 1+nx$.

EXERCICE 15. ●●○ Suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 1}$ par récurrence :

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

1. Montrer que $\forall n \geq 2, \forall m \geq 1, F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.
2. Montrer que $\forall n \geq 2, F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2 \text{ et } F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n+1}^2 - 1.$$

EXERCICE 16. ◇ – ●●○ Un drôle de raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ un prédicat portant sur un entier $n \geq 2$ un entier. On suppose :

- $\mathcal{P}(2)$;
- $\forall n \geq 3, \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n-1)$.
- $\forall n \geq 2, \mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(2) \implies \mathcal{P}(2n)$;

Montrer que $\forall n \geq 2, \mathcal{P}(n)$.

EXERCICE 17. ♣/◇ – ●●○ Inégalité arithmético-géométrique

En utilisant le mode de raisonnement par récurrence décrit dans l'exercice précédent, montrer que : $\forall n \geq 2, \forall x_1, \dots, x_n \geq 0, \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

EXERCICE 18. ♣/◇ – ●●●○ *Théorème de Rédei sur les tournois*

Soit $n \geq 2$ un entier. Un tournoi oppose n équipes : chaque équipe affronte une fois chaque autre équipe et leur match désigne un vainqueur (pas de match nul).

Montrer qu'on peut numéroter les équipes $E_1, \dots, E_n$ de telle sorte que, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, l'équipe E_i a battu l'équipe E_{i+1} .

4 Ensembles

EXERCICE 19. ○○○○ *Notations ensemblistes*

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Les assertions suivantes sont-elles correctes ?

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------|-------------------------|
| 1. $1 \in E$; | 3. $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$; | 5. $(1, 2) \subset E$; |
| 2. $1 \in \mathcal{P}(E)$; | 4. $(1, 2) \in E$; | 6. $\emptyset \in E$. |

EXERCICE 20. ◇ – ○○○○ *Inclusion de produits cartésiens*

Soient A, B, C trois ensembles. On suppose que $A \times B \subset B \times C$. Montrer que $A \subset C$.

EXERCICE 21. ◇ – ●○○○ *Raisonnements ensemblistes*

Soit Ω un ensemble, soient A, B et C des parties de Ω . Montrer les assertions suivantes :

1. $A \cap B = A \cup B \iff A = B$;
2. $(A \cup B \subset A \cup C) \wedge (A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C$.

EXERCICE 22. ♣/◇ – ●○○○ *Égalité d'ensembles*

On considère $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 1, 4t + 3), t \in \mathbb{R}\}$ deux parties de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $A = B$.

EXERCICE 23. ♣ – ●●○○ *Union et intersection infinies*

Soient a et b deux réels tels que $b - a > 2$. Déterminer $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$ et $B = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$.

EXERCICE 24. ●●○○ *Différence symétrique*

Soit Ω un ensemble. Si $A, B \subset \Omega$, on appelle différence symétrique de A et B – et on note $A \Delta B$ – l'ensemble $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

1. Montrer que $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.
2. Si A, B et C sont trois ensembles, identifier simplement l'ensemble $A \Delta (B \Delta C)$.
3. En déduire que Δ est associative : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega), A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
4. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega), A \Delta C = B \Delta C \iff A = B$.

EXERCICE 25. ♣/◇ – ●●○○ *Des équations ensemblistes*

Soient Ω un ensemble, A et B des parties de Ω . Résoudre les équations

1. $A \cap X = B$;

2. $A \cup X = B$;

3. $A \cap X = B \cap X$,

où pour chaque équation, l'inconnue est $X \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Indications

Exercice 1. Utiliser des tables de vérité.

Exercice 2. Pour montrer qu'une assertion est fausse, on donne un contre-exemple.

Exercice 7. Pour 2., considérer par exemple $x \mapsto x^2$

Exercice 8. Par contraposée.

Exercice 9. Par analyse-synthèse. Bien écrite, l'analyse montre l'unicité.

Exercice 13. Pour 2., on ne demande pas d'exhiber α et β

Exercice 16. On peut raisonner par une récurrence forte classique ou bien – ce qui revient au même – raisonner par l'absurde en considérant le plus petit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est faux.

Exercice 17. Pour $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n-1)$, on pourra poser $x_n = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$.

Exercice 18. Pour la récurrence, on peut se représenter n équipes ainsi numérotées sur une droite. Il s'agit alors de décider où placer la nouvelle équipe pour respecter la contrainte.

Exercice 20. Traduire l'hypothèse d'inclusion.

Exercice 21. Pour 2., considérer un $b \in B$ et distinguer selon qu'il appartient ou pas à A .

Exercice 22. Le premier ensemble est présenté par équations; le deuxième par paramétrage. L'inclusion $B \subset A$ devrait être immédiate. Pour $A \subset B$, il faut trouver quel t convient.

Exercice 25. Des dessins sont vivement recommandés. On raisonnera par analyse-synthèse : quelles conditions doit vérifier X pour satisfaire ces équations? Puis, on montrera qu'elles sont suffisantes.