

DM 1 - Modes de raisonnement

Exercice 1. – Théorème de Zeckendorf

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.
Le but de l'exercice est de montrer le théorème de Zeckendorf :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique entier $N \in \mathbb{N}^*$ et des entiers uniques $k_1, \dots, k_N \geq 2$ tels que :

- $\forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, k_{i+1} \geq k_i + 2$;
- $n = F_{k_N} + F_{k_{N-1}} + \dots + F_{k_1}$.

On appellera *décomposition de Zeckendorf* de n cette écriture.

1. Déterminer la décomposition de Zeckendorf de 17 et de 52.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $k \geq 2$ tel que $F_k \leq n < F_{k+1}$.
3. Démontrer que tout entier n non nul admet une décomposition de Zeckendorf.
4. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$F_{2n} - 1 = F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} \text{ et } F_{2n+1} - 1 = F_2 + F_4 + \dots + F_{2n}.$$

5. En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'unicité de la décomposition de Zeckendorf de n .

Exercice 2. – Une équation fonctionnelle

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + f(y)) = f(x) + y.$$

1. Montrer que tout y de $\mathbb{R}$ admet un antécédent par f , qu'on explicitera en fonction de $f(0)$.
2. On note a un antécédent de 0 par f . Montrer que $a = 0$.
3. Montrer que f est une involution : $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = x$.
4. Montrer que f est additive : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$.
5. Montrer réciproquement que si une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est involutive et additive, alors elle vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
6. Dans cette question, on suppose de plus que f est croissante. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.
7. Dans cette question, on suppose de plus que f est décroissante.
 - (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + f(x)$ est un point fixe de f .
 - (b) Déterminer f .
8. Existe-t-il¹ des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non monotones, vérifiant la propriété $\mathcal{P}$?

¹Ne pas chercher trop longtemps...

Exercice 3. – Démonstration d'assertions

Pour chacune des assertions suivantes, expliciter *concrètement* sa signification, puis déterminer avec une démonstration si elle est vraie ou fausse.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} : ax^2 + bx + c = 0 \text{ et } ay^2 + by + c = 0.$
2. $\forall s, p \in \mathbb{R}, \exists x, y \in \mathbb{R} : x + y = s \text{ et } xy = p.$
3. $\forall A > 0, \exists a, b > 0 : ab = A \text{ et } (\forall c, d > 0, cd = A \implies a + b \leq c + d).$