DM 1 - Modes de raisonnement

Exercice 1. – *Théorème de Zeckendorf*

On note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. On commence par calculer les premiers termes :

   $$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21, \quad F_9 = 34.$$

   On obtient alors
   $$17 = 13 + 3 + 1 = F_7 + F_4 + F_2,$$
   et
   $$52 = 34 + 13 + 5 = F_9 + F_7 + F_5.$$

2. Par récurrence double immédiate, la suite de Fibonacci est à valeurs entières positives.

   Pour tout $n \geq 1$,
   $$F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \geq 0.$$
   La suite $(F_n)_{n\geq 1}$ est donc croissante.

   Comme $F_1 = 1$, on a
   $$\forall n \geq 1, \qquad F_n \geq 1.$$

   Pour $n \geq 2$,
   $$F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \geq 1.$$
   Ainsi, la suite $(F_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

   Comme la suite est à valeurs entières et strictement croissante à partir du rang 2, on obtient par récurrence
   $$\forall n \geq 2, \qquad F_n \geq n - 1.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons
   $$A = \{k \in \mathbb{N} \mid F_k \leq n\}.$$
   D'après l'inégalité précédente, cet ensemble est fini. Il est non vide, donc il admet un plus grand élément, noté k.

   Par définition,
   $$F_k \leq n,$$
   et, par maximalité de k,
   $$F_{k+1} > n.$$

Ainsi,

$$F_k \leq n < F_{k+1}.$$

De plus, $k \neq 0$ et $k \neq 1$, car sinon $F_{k+1} = 1$ et l'inégalité

$$n < F_{k+1}$$

imposerait $n = 0$, ce qui est impossible puisque $n \geq 1$.

3. On montre par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que tout entier n admet une décomposition de Zeckendorf.

   Initialisation. Pour $n = 1$,

   $$1 = F_2,$$

   qui est bien une décomposition de Zeckendorf.

   Hérédité. Soit $n \geq 1$, et supposons que tout entier de $\{1, \ldots, n\}$ admet une décomposition de Zeckendorf.

   D'après la question précédente, il existe $k \geq 2$ tel que

   $$F_k \leq n + 1 < F_{k+1}.$$

   Si $n + 1 = F_k$, alors on dispose immédiatement d'une décomposition de Zeckendorf de $n + 1$.

   Sinon, posons $m = n + 1 - F_k$. On a $1 \leq m \leq n$ donc, par hypothèse de récurrence, m admet une décomposition de Zeckendorf.

   Par ailleurs,

   $$m < n + 1 - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}.$$

   Le plus grand terme de Fibonacci intervenant dans la décomposition de m est donc d'indice au plus $k - 2$.

   En ajoutant F_k à cette décomposition, on obtient une somme de nombres de Fibonacci dont deux indices consécutifs diffèrent d'au moins 2 : c'est donc une décomposition de Zeckendorf de $n + 1$.

   Ainsi, tout entier $n \geq 1$ admet une décomposition de Zeckendorf.

4. On montre, pour tout $n \geq 1$, les deux identités

   $$F_{2n} - 1 = \sum_{\substack{2 \leq k \leq 2n-1 \\ k \text{ impair}}} F_k,$$

   et

   $$F_{2n+1} - 1 = \sum_{\substack{2 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} F_k.$$

   On peut les obtenir par récurrence, mais une somme télescopique donne une preuve plus directe.

En effet,

$$\sum_{\substack{2\le k\le 2n-1\\ k \text{ impair}}} F_k = \sum_{i=1}^{n-1} F_{2i+1}.$$

Or

$$F_{2i+1} = F_{2i+2} - F_{2i}.$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_{2i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} (F_{2i+2} - F_{2i}) = F_{2n} - F_2 = F_{2n} - 1.$$

De même,

$$\sum_{\substack{2\le k\le 2n\\ k \text{ pair}}} F_k = \sum_{i=1}^{n} F_{2i},$$

et, puisque

$$F_{2i} = F_{2i+1} - F_{2i-1},$$

on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - F_1 = F_{2n+1} - 1.$$

5. On montre par récurrence forte sur $n \ge 1$ l'unicité de la décomposition de Zeckendorf de n.

Initialisation. Comme $F_m \ge 2$ pour tout $m \ge 3$, le seul terme pouvant apparaître dans une décomposition de 1 est F_2. Ainsi

$$1 = F_2$$

est l'unique décomposition de Zeckendorf de 1.

Hérédité. Soit $n \ge 1$, et supposons que tout entier de $\{1, \dots, n\}$ possède une unique décomposition de Zeckendorf.

Considérons deux décompositions de Zeckendorf de $n+1$:

$$n+1 = \sum_{i=1}^{N} F_{k_i} = \sum_{j=1}^{M} F_{\ell_j},$$

où

$$k_1 < \cdots < k_N, \qquad \ell_1 < \cdots < \ell_M,$$

et où deux indices successifs diffèrent d'au moins 2.

Il suffit de montrer que

$$k_N = \ell_M.$$

En effet, on pourrait alors soustraire le terme commun

$$F_{k_N} = F_{\ell_M}$$

aux deux décompositions et appliquer l'hypothèse de récurrence à

$$n+1-F_{k_N}.$$

Supposons donc, par l'absurde, que

$$k_N \neq \ell_M.$$

Par symétrie, on peut supposer

$$k_N > \ell_M.$$

Comme la suite de Fibonacci est strictement croissante à partir de l'indice 2,

$$F_{k_N} \geq F_{\ell_M+1}.$$

D'autre part, puisque les indices de la seconde décomposition sont espacés d'au moins 2,

$$\ell_{M-j} \leq \ell_M - 2j.$$

Par croissance de la suite de Fibonacci,

$$F_{\ell_{M-j}} \leq F_{\ell_M-2j}.$$

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{M} F_{\ell_j} \leq \sum_{\substack{2\leq k\leq \ell_M \\ k\equiv \ell_M\,[2]}} F_k.$$

D'après la question précédente,

$$\sum_{\substack{2\leq k\leq \ell_M \\ k\equiv \ell_M\,[2]}} F_k = F_{\ell_M+1} - 1.$$

On en déduit

$$F_{\ell_M+1} \leq F_{k_N} \leq \sum_{i=1}^{N} F_{k_i} = \sum_{j=1}^{M} F_{\ell_j} \leq F_{\ell_M+1} - 1,$$

ce qui est absurde.

Donc

$$k_N = \ell_M.$$

Après soustraction du plus grand terme commun, l'hypothèse de récurrence assure l'égalité des deux décompositions restantes.

Ainsi, tout entier $n \geq 1$ possède une unique décomposition de Zeckendorf.

Exercice 2. – *Une équation fonctionnelle*

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. La propriété $\mathscr{P}$ obtenue en substituant 0 à x et $y - f(0)$ à y donne :

$$f\big(0 + f(y - f(0))\big) = f(0) + y - f(0) = y.$$

Ainsi, $f(y - f(0))$ est un antécédent de y par f.

2. En substituant 0 à x et a à y dans la propriété $\mathscr{P}$, on a $f(f(a)) = f(0) + a$, donc $f(0) = f(0) + a$, et finalement $a = 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la propriété $\mathscr{P}$, on a $f(0+f(x)) = f(0)+x$. Comme on sait que $f(0) = 0$ (car 0 a un antécédent dont on vient de montrer qu'il ne peut être que 0), on en déduit que $f(f(x)) = x$.

4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. La propriété $\mathscr{P}$ donne :

$$f(x + f(f(y))) = f(x) + f(y).$$

Le caractère involutif de f permet de simplifier le premier membre : on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

5. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction involutive et additive. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$g(x + g(y)) = g(x) + g(g(y)) = g(x) + y,$$

en utilisant l'additivité puis le caractère involutif. Donc, g vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \geq x$, alors par croissance, $x = f(f(x)) \geq f(x)$ et donc $f(x) = x$. De même, si $f(x) \leq x$, $x = f(f(x)) \leq f(x)$ et donc $f(x) = x$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.
On remarque qu'on utilise seulement le caractère involutif et la croissance de f.

7. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x + f(x)) = f(x) + f(f(x)) = f(x) + x$, par additivité et involutivité de f. Donc, $x + f(x)$ est un point fixe de f.

   (b) Comme f est décroissante, elle ne peut avoir qu'un seul point fixe ; en effet si $a < b$ sont deux points fixes, on a $f(a) = a \geq f(b) = b$ par croissance, ce qui est absurde. Or, on sait déjà que 0 est un point fixe de f. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + x = 0$. Et donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x$.

8. Elles existent mais on ne peut pas en construire d'exemples explicites. On verra plus tard qu'une fonction additive $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est automatiquement un endomorphisme $\mathbb{Q}$-linéaire de $\mathbb{R}$ et on ne sait pas construire d'exemples non triviaux de tels endomorphismes (autres que les fonctions $x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$.)
Il est tout à fait normal de ne pas comprendre cette réponse.

Exercice 3. – *Démonstration d'assertions*

1. On affirme que deux réels quelconques sont toujours racines d'un même polynôme de degré 2 à coefficients réels. C'est vrai.

   Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On définit

$$P = (X - x)(X - y) = X^2 - (x + y)X + xy.$$

   Alors, par construction, x et y sont racines de P.

   Ainsi, en posant

$$a = 1, \qquad b = -(x + y), \qquad c = xy,$$

   on a bien

$$ax^2 + bx + c = ay^2 + by + c = 0.$$

2. On affirme qu'étant donnés deux réels s et p, on peut trouver deux réels x et y de somme s et de produit p. C'est faux.

   Prenons $s = 0$ et $p = 1$. Si x et y sont réels et vérifient

   $$x + y = 0,$$

   alors

   $$y = -x,$$

   donc

   $$xy = -x^2 \leq 0.$$

   Il est donc impossible d'avoir simultanément

   $$x + y = 0 \qquad \text{et} \qquad xy = 1.$$

3. On affirme qu'étant donnée une aire $A > 0$, on peut trouver un rectangle ayant cette aire et dont le périmètre est minimal parmi les rectangles ayant cette aire. C'est vrai.

   Soit $A > 0$. Considérons le carré de côté $\sqrt{A}$. Son aire vaut bien A et son demi-périmètre vaut $2\sqrt{A}$.

   Soit maintenant un rectangle quelconque de côtés $c, d > 0$ et d'aire A. Alors

   $$cd = A.$$

   Par l'inégalité arithmético-géométrique,

   $$c + d \geq 2\sqrt{cd} = 2\sqrt{A}.$$

   Ainsi le demi-périmètre de tout rectangle d'aire A est supérieur ou égal à celui du carré de côté $\sqrt{A}$.

   Le carré est donc un rectangle de périmètre minimal parmi les rectangles d'aire A.