

Nombres réels et inégalités

1 Inégalités sur les nombres réels

EXERCICE 1. ●○○ *Somme et somme des inverses*

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2$;

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz;
2. En développant et regroupant astucieusement les termes.

EXERCICE 2. ◇ – ●○○ *Une inégalité avec des puissances*

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$.

EXERCICE 3. ♣/◇ – ●●○ *Lemme de Titu*

1. Soient a_1, a_2, b_1, b_2 des réels strictement positifs. Montrer que $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} \geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{b_1 + b_2}$.
2. En déduire plus généralement le lemme de Titu : si $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des réels strictement positifs, alors $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n}$.
3. Retrouver ce résultat par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

EXERCICE 4. ♣/◇ – ●●○ *Inégalités de Nesbitt et Shapiro*

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.
 - (a) Montrer que $3(ab + ac + bc) \leq (a + b + c)^2$.
 - (b) Dédurre l'inégalité de Nesbitt du lemme de Titu : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.
2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$.
 - (a) Montrer que $2(a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)) \leq (a+b+c+d)^2$.
 - (b) Dédurre l'inégalité suivante de Shapiro du lemme de Titu :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

EXERCICE 5. ♣/◇ – ●●○ *Une majoration de $\prod (1 + a_k)$*

Soient $a_1, \dots, a_n > -1$ des nombres réels tels que $S = \sum_{k=1}^n a_k \geq 0$. Montrer que $\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \leq \sum_{i=0}^n \frac{S^i}{i!}$.

EXERCICE 6. ♣ – ●●○ $\sum a_k$ et $\sum \varepsilon_k a_k$

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels.

1. Montrer qu'il existe $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $\left| \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$.
2. Montrer que $\max_{1 \leq k \leq n} |a_k| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k \right|$.

2 Valeur absolue et partie entière

EXERCICE 7. ◇ – ●○○ *Incertitudes sur la somme et le produit*

On approche n réels $x_1, \dots, x_n$ par des réels $\xi_1, \dots, \xi_n$.

1. Majorer l'erreur commise en approchant $x_1 + \dots + x_n$ par $\xi_1 + \dots + \xi_n$, en fonction des erreurs $\varepsilon_i = |x_i - \xi_i|$.
2. Même question avec le produit, la majoration dépendant aussi des x_i .

EXERCICE 8. ◇ – ●○○ *Variations sur l'inégalité triangulaire*

Soient x et y deux réels. Montrer que

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$;
2. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.

EXERCICE 9. ●○○ *Équations avec parties entières*

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \rfloor = 2$;
2. $\lfloor x + \sqrt{2} \rfloor - \lfloor x \rfloor = 2$.

EXERCICE 10. ●○○ *Parité d'une partie entière*

Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair.
2. En déduire que $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$ est un entier impair.

EXERCICE 11. ◇ – ●●○ *(In)équations avec valeurs absolues*

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $|x - 7| = |4x - 1|$;
2. $|x - 7| = 4x - 1$;
3. $|3x + 1| > |x + 2|$;
4. $|2x - 4| = |x + 3|$;
5. $|x^2 - 2| \leq 2x + 1$;
6. $|x - 2| + |3x + 1| < 4$.

EXERCICE 12. ♣/◇ – ●●○ *Une autre équation avec parties entières*

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $\lfloor 3x - 2 \rfloor = \lfloor 2x + 1 \rfloor$.

EXERCICE 13. ♣ – ●●○ *Deux identités avec la partie entière*

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor$;
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

EXERCICE 14. ◇ – ●●○ *Somme de parties entières*

Soit x un réel, soit $m \geq 1$ un entier. Montrer que $\lfloor mx \rfloor = \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor x + \frac{k}{m} \right\rfloor$.

3 Topologie des réels

EXERCICE 15. ●○○ *Borne supérieure, borne inférieure*

Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants. Préciser si les bornes sont atteintes.

1. $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
2. $B = \left\{ \left| \frac{\cos n}{n} \right|, n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
3. $C = \left\{ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$;
4. $D = \left\{ \frac{nm}{n^2 + m^2 + 1}, (n, m) \in \mathbb{N}^2 \right\}$.

EXERCICE 16. ♣ – ●○○ *Somme et produit de parties denses*

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties, avec A dense dans $\mathbb{R}$ et B non vide.

1. Montrer que $A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. A quelle condition sur B , $AB = \{ab, (a, b) \in A \times B\}$ est-elle dense dans $\mathbb{R}$?

EXERCICE 17. ♣/◇ – ●●○ *Théorème des chipolatas*

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \cap I_{n+1} \neq \emptyset$.

Montrer que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

EXERCICE 18. ♣/◇ – ●●○ *Densité des $\sqrt{n} - \sqrt{m}$*

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de limite $+\infty$ telles que $\lim_n (u_{n+1} - u_n) = 0$ et $\lim_n (v_{n+1} - v_n) = 0$.
Montrer que $\{u_n - v_m, (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\{\sqrt{n} - \sqrt{m}, (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 19. ♣/◇ – ●●○ *Densité de $\cos(\ln n)$*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\{\cos(\ln n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Indications

Exercice 2. Se ramener à une seule variable réelle.

Exercice 3. Pour 3., définir x_i et y_i de sorte que $\frac{a_i^2}{b_i} = x_i^2$ et $a_i = x_i y_i$.

Exercice 4. Pour les questions (b), les fractions du type $\frac{a}{b+c}$ ne sont pas encore écrites sous la bonne forme pour appliquer le lemme de Titu.

Exercice 5. Penser à l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 7. Pour le produit, passer de $x_1 \dots x_n$ à $\xi_1 \dots \xi_n$ en n étapes.

Exercice 8. Pour 2., réécrire les quantités en fonction de $x-1$ et $y-1$.

Exercice 11. On pourra dans certains cas faire un tableau donnant les signes des quantités pertinentes en fonction de x .

Exercice 12. Commencer par montrer qu'il suffit de considérer les x appartenant à un intervalle de longueur finie. Puis, faire un tableau résumant les valeurs prises par les deux membres.

Exercice 14. Faire une disjonction de cas selon la partie fractionnaire de x .

Exercice 17. Le montrer pour deux intervalles, puis pour un nombre fini, puis passer à l'infini. La caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$ peut aider.

Exercice 18. Les hypothèses sur (u_n) se traduisent en

- $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n \geq A$;
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.

De même pour (v_n) . Les u_n sont arbitrairement grands mais de plus en plus resserrés; de même pour les v_m . Exploiter cela.

Exercice 19. Utiliser la périodicité de $\cos$ et le fait que les valeurs $\ln n$ sont de plus en plus grandes et de plus en plus resserrées.