

DM 3 - Nombres réels

1 Théorème de Beatty

On dit de deux parties A et B d'un ensemble E qu'elles forment une partition de E si A et B sont non vides, $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$. Si $\alpha > 1$ est un réel, on note $B_\alpha = \{\lfloor n\alpha \rfloor, n \in \mathbb{N}^*\}$. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note $f_\alpha(m)$ le nombre d'entiers $p \in B_\alpha$ tels que $p \leq m$.

On cherche à démontrer le théorème de Beatty :

Soient $\alpha, \beta > 1$. Les ensembles B_α et B_β forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si, et seulement si, α et β sont irrationnels et vérifient $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

1. Soient $\alpha > 1$ un réel, $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f_\alpha(m)$ vérifie :

$$\frac{m+1}{\alpha} - 1 \leq f_\alpha(m) < \frac{m+1}{\alpha}.$$

2. En déduire que la suite $\left(\frac{f_\alpha(m)}{m}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge, vers un réel que l'on précisera.

Soient $\alpha, \beta > 1$ tels que B_α et B_β forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

3. Montrer que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.
4. Montrer que $\frac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel, puis que α et β le sont.

On suppose maintenant que $\alpha, \beta > 1$ sont deux irrationnels tels que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ (et on ne fait plus d'hypothèses sur B_α et B_β).

5. Montrer que B_α et B_β sont disjoints.
6. Montrer que pour tout $m \geq 1$, $f_\alpha(m) + f_\beta(m) = m$, puis conclure.

2 Inégalités sur des sommes de $\mathbb{R}$

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $B_k = \sum_{i=1}^k b_i$, $m = \min_{1 \leq k \leq n} \{B_k\}$ et $M = \max_{1 \leq k \leq n} \{B_k\}$.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

