

DM 3 - Nombres réels – Corrigé

1 Théorème de Beatty

On rappelle que, pour $\alpha > 1$,

$$B_\alpha = \{\lfloor n\alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\},$$

et, pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$f_\alpha(m) = |\{p \in B_\alpha \mid p \leq m\}|.$$

1. Commençons par remarquer que si n, p sont deux entiers distincts, alors

$$\lfloor n\alpha \rfloor \neq \lfloor p\alpha \rfloor.$$

En effet, on peut supposer, par symétrie, que $n < p$. Alors

$$p\alpha - n\alpha \geq (n+1)\alpha - n\alpha = \alpha > 1,$$

de sorte que $p\alpha$ et $n\alpha$ ne peuvent pas avoir la même partie entière.

On en déduit que

$$f_\alpha(m) = |\{n \in \mathbb{N}^* \mid \lfloor n\alpha \rfloor \leq m\}|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les équivalences suivantes :

$$\lfloor n\alpha \rfloor \leq m \iff n\alpha < m+1 \iff n < \frac{m+1}{\alpha}.$$

- Si $\frac{m+1}{\alpha}$ est un entier, cela équivaut à

$$1 \leq n \leq \frac{m+1}{\alpha} - 1,$$

et il y a $\frac{m+1}{\alpha} - 1$ valeurs possibles pour n .

- Si $\frac{m+1}{\alpha}$ n'est pas un entier, cela équivaut à

$$1 \leq n \leq \left\lfloor \frac{m+1}{\alpha} \right\rfloor,$$

et il y a

$$\left\lfloor \frac{m+1}{\alpha} \right\rfloor$$

valeurs possibles pour n .

Dans les deux cas, ce nombre de valeurs $f_\alpha(m)$ vérifie bien la double inégalité

$$\frac{m+1}{\alpha} - 1 \leq f_\alpha(m) < \frac{m+1}{\alpha}.$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a donc, en divisant par m l'inégalité précédente :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{m\alpha} - \frac{1}{m} \leq \frac{f_\alpha(m)}{m} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{m}.$$

Les membres de gauche et de droite tendent vers $\frac{1}{\alpha}$ quand m tend vers l'infini. Par le théorème des gendarmes, on a donc

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(m)}{m} = \frac{1}{\alpha}.$$

On suppose désormais que $\alpha, \beta > 1$ sont tels que B_α et B_β forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Comme B_α et B_β forment une partition de $\mathbb{N}^*$, l'union

$$\{p \in B_\alpha \mid p \leq m\} \cup \{p \in B_\beta \mid p \leq m\}$$

est disjointe et vaut $\llbracket 1, m \rrbracket$. Donc, en prenant les cardinaux :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad f_\alpha(m) + f_\beta(m) = m.$$

En divisant par m et en faisant tendre m vers l'infini, on obtient l'égalité

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

d'après la question précédente.

4. Supposons par l'absurde que $\frac{\alpha}{\beta}$ est un nombre rationnel, qu'on écrit sous la forme

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}^*.$$

On a donc $q\alpha = p\beta$ et donc

$$\lfloor q\alpha \rfloor = \lfloor p\beta \rfloor.$$

Cet élément est donc commun à B_α et B_β , ce qui contredit le fait que ces deux ensembles sont disjoints. Donc $\frac{\alpha}{\beta}$ est un nombre irrationnel.

De l'égalité

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

on obtient

$$1 + \frac{\alpha}{\beta} = \alpha.$$

Ainsi, α est irrationnel. De même, β est irrationnel.

On suppose maintenant que α et β sont deux irrationnels strictement plus grands que 1 tels que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

et on ne fait plus d'hypothèse sur B_α et B_β .

5. Par l'absurde, supposons l'existence d'un élément $n \in B_\alpha \cap B_\beta$. On peut donc trouver $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$n = \lfloor p\alpha \rfloor \quad \text{et} \quad n = \lfloor q\beta \rfloor.$$

On a donc

$$n \leq p\alpha < n+1 \quad \text{et} \quad n \leq q\beta < n+1.$$

En divisant la première inégalité par α et la deuxième par β :

$$\frac{n}{\alpha} \leq p < \frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{n}{\beta} \leq q < \frac{n}{\beta} + \frac{1}{\beta}.$$

En sommant les deux inégalités et en utilisant que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

on obtient

$$n \leq p + q < n + 1.$$

Comme n, p et q sont des entiers, c'est absurde. Donc

$$\boxed{B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset}.$$

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On somme les inégalités de la question 1, pour α et β , et on obtient :

$$(m+1) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) - 1 - 1 \leq f_\alpha(m) + f_\beta(m) < (m+1) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right).$$

D'où

$$m-1 \leq f_\alpha(m) + f_\beta(m) < m+1.$$

Et donc

$$f_\alpha(m) + f_\beta(m) = m-1 \quad \text{ou} \quad f_\alpha(m) + f_\beta(m) = m,$$

car $f_\alpha(m)$ et $f_\beta(m)$ sont entiers.

Mais si on avait

$$f_\alpha(m) + f_\beta(m) = m-1,$$

on aurait les deux égalités

$$f_\alpha(m) = \frac{m+1}{\alpha} - 1 \quad \text{et} \quad f_\beta(m) = \frac{m+1}{\beta} - 1,$$

qui contredisent l'irrationalité de α et β . Donc,

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad f_\alpha(m) + f_\beta(m) = m}.$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Comme les ensembles B_α et B_β sont disjoints, c'est aussi le cas des ensembles

$$B_\alpha \cap \llbracket 1, m \rrbracket \quad \text{et} \quad B_\beta \cap \llbracket 1, m \rrbracket.$$

Comme la somme de leurs cardinaux vaut m , cardinal de $\llbracket 1, m \rrbracket$, on en déduit que tout élément de $\llbracket 1, m \rrbracket$ est dans B_α ou B_β . Le raisonnement étant valide pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, les ensembles B_α et B_β forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

La question 4 montrait un sens du théorème de Beatty, celle-ci montre l'autre sens. On a donc démontré ce théorème.

2 Inégalités sur des sommes de $\mathbb{R}$

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $b_k = B_k - B_{k-1}$, avec par convention $B_0 = 0$. Donc,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell+1} B_\ell = a_n B_n - a_1 B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.$$

Comme $B_0 = 0$, ceci conclut.

2. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $m \leq B_k \leq M$. Comme a_n et les $a_k - a_{k+1}$ sont positifs, on déduit de l'égalité précédente que :

$$a_n m + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) m \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq a_n M + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) M.$$

Par télescopage, le membre de gauche vaut $a_1 m$ et celui de droite $a_1 M$, d'où la conclusion.

3. Notons M_a la quantité $\max_{1 \leq k \leq n} |b_1 + \dots + b_k|$. Pour tout k , on a $b_1 + \dots + b_k \leq |b_1 + \dots + b_k| \leq M_a$.

Comme c'est vrai pour tout k , on en déduit que $M \leq M_a$.

Par ailleurs, pour tout k , on a $-(b_1 + \dots + b_k) \leq M_a$. Et donc, $-m = \max_{1 \leq k \leq n} \{-(b_1 + \dots + b_k)\} \leq M_a$.

Ainsi, $m \geq -M_a$.

Avec les inégalités précédentes, on a donc : $-a_1 \times M_a \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq a_1 \times M_a$. Donc, $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq M_a$, ce qu'il fallait démontrer.

4. On réécrit la question 1, comme :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = n a_n \times \frac{B_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) \frac{B_k}{k}.$$

Pour tout k , on a l'encadrement $m' \leq \frac{B_k}{k} \leq M'$. De plus, les $a_k - a_{k+1}$ et a_n sont positifs. On en déduit l'encadrement :

$$n a_n \times m' + \sum_{k=1}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) m' \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq n a_n \times M' + \sum_{k=1}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) M'.$$

Or, $\sum_{k=1}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k - \sum_{k=2}^n (k-1) a_k = a_1 - (n-1) a_n + \sum_{k=2}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k - n a_n$. D'où l'encadrement annoncé.

3 Une caractérisation des intervalles

1. Préliminaires.

- (a) On note $B = [0, 1] \cup \{2\}$. Alors, $[0, 1] \subset B$, donc B vérifie ii). Mais 1 et 2 sont dans B tandis que $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ n'y est pas, donc B ne vérifie pas i).
- (b) On considère $C = \mathbb{Q}$. D'une part, C vérifie i) car la moyenne de deux rationnels est un rationnel. D'autre part, C ne vérifie pas ii) : en effet, si C contenait un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, cet intervalle ne contiendrait aucun irrationnel, ce qui contredirait la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

- (c) Soient $x, y \in I$. Alors, $u < x, y < v$. Donc, $\frac{x+y}{2} < \frac{v+v}{2} = v$ et de même $\frac{x+y}{2} > u$. Donc, $\frac{x+y}{2} \in I$; donc I vérifie i). Comme I contient par exemple le segment $[\frac{2u+v}{3}, \frac{u+2v}{3}]$, I vérifie aussi ii).
2. (a) Soit $u \in \mathbb{R}$ tel que $b \leq u \leq \frac{b+x}{2}$. Alors, u est le milieu du segment d'extrémités x et $u - (x - u) = 2u - x$. Comme $u \leq \frac{b+x}{2}$, $2u - x \leq b$. De plus, x vérifie par hypothèse $x - b \leq b - a$ donc $x \leq 2b - a$, donc $-x \geq a - 2b$. Dès lors, $2u - x \geq 2u + a - 2b \geq a$. Ainsi, $2u - x \in [a, b]$. Donc, $2u - x$ et x sont tous deux dans A , donc leur milieu u aussi. On a montré l'inclusion souhaitée.
- (b) On a $\frac{b_n + x}{2} = \frac{b + 2(2^n - 1)x + x}{2^{n+1}} = \frac{b + (2^{n+1} - 1)x}{2^{n+1}} = b_{n+1}$. On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[b_n, b_{n+1}] \subset A$ par récurrence forte sur n :
- Pour $n = 0$, il s'agit de la question précédente.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \leq n$, $[b_k, b_{k+1}] \subset A$. Alors A contient $[a, b]$ et l'union de tous les $[b_k, b_{k+1}]$, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, donc $[a, b_{n+1}] \subset A$. Comme $b_{n+1} > b$ et que $x - b \leq b - a$, on a aussi $x - b_{n+1} \leq b_{n+1} - a$. On peut donc appliquer la question précédente en remplaçant b par b_{n+1} . Comme $b_{n+2} = \frac{b_{n+1} + x}{2}$, on en déduit que $[b_{n+1}, b_{n+2}] \subset A$.
- (c) La suite (b_n) est strictement croissante et de limite x . De plus, $b_0 = b$. On en déduit que tout élément $y \in [b, x[$ est dans (exactement) un $[b_n, b_{n+1}]$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, $[b, x[\subset A$. Comme par hypothèse $x \in A$, $[b, x] \subset A$.
3. (a) Comme précédemment, x_{n+1} est le milieu du segment d'extrémités b et x_n . De plus, $x_0 = x$. Par une récurrence immédiate, on a $x_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, si $n \in \mathbb{N}$, $x_n - x_{n+1} = x_{n+1} - b \leq x_{n+1} - a$ car $a < b$.
- (b) Comme (x_n) tend vers b , on a $\lim_n (x_n - b) = 0 < b - a$. En particulier, il existe un rang n_0 tel que $x_{n_0} - b \leq b - a$.
- (c) On procède par récurrence descendante sur $n \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket$.
- Par la question précédente et la question 2.a), on a $[b, x_{n_0}] \subset A$.
 - Soit $n \in \llbracket 1, n_0 \rrbracket$ tel que $[b, x_n] \subset A$. Alors, on a aussi $[a, x_n] \subset A$. Comme $x_{n-1} - x_n \leq x_n - a$, on a $[x_n, x_{n-1}] \subset A$ par la question 2.c). Et donc aussi $[b, x_{n-1}] \subset A$, ce qui conclut l'hérédité.
4. Soient $x < y \in A$. On doit montrer que $[x, y] \subset A$. On distingue différents cas :
- Si $x \leq y \leq a$, alors $[x, a] \subset A$ par ce qui précède. En particulier, $[x, y] \subset A$.
 - Si $x \leq a \leq y \leq b$, alors $[x, a] \subset A$ et donc aussi $[x, y] \subset A$ car $[a, y] \subset [a, b]$.
 - Si $x \leq a \leq b \leq y$, on a $[x, a] \subset A$, $[a, b] \subset A$ et $[b, y] \subset A$ donc $[x, y] \subset A$.
 - Les autres cas sont analogues.

Ainsi, A est une partie convexe de $\mathbb{R}$. Donc, A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarque. Cette dernière question est assez artificielle. Il est plus naturel de démontrer directement que A est un intervalle en imitant la preuve du cours de la caractérisation *intervalles = convexes*, plutôt que de passer par la convexité.