

DS n° 1 – Mathématiques

Durée : 4 heures

Consignes. Les calculatrices et autres technologies sont interdites. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement. La copie doit être lisible, les calculs suffisamment détaillés et les résultats clairement mis en valeur. L'exercice et les deux problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Toute erreur d'énoncé présumée peut être signalée pendant l'épreuve.

Exercice – Petits calculs

1. Trouver les solutions de l'équation $z^2 + z - \frac{1}{2} + i = 0$, où $z \in \mathbb{C}$.
2. On cherche à montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est racine d'un polynôme de degré 3 à coefficients rationnels.
 - (a) Déterminer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, une expression de $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
 - (b) On note $\theta_0 = \frac{2\pi}{7}$. Montrer que $\cos(3\theta_0) = \cos(4\theta_0)$.
 - (c) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est racine d'un polynôme de degré 4 à coefficients rationnels, puis montrer qu'il est racine d'un polynôme de degré 3 à coefficients rationnels.

Problème 1 – Étude de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ et équation de Pell

Dans ce problème, on fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ et on note $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, ou G_α , la partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$G_\alpha = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} = \{n + m\alpha, (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

A. Propriétés générales

1. Montrer que G_α est stable par somme et par passage à l'opposé :

$$\forall x, y \in G_\alpha, \quad x + y \in G_\alpha \quad \text{et} \quad -x \in G_\alpha.$$

2. Expliquer ce que signifie concrètement l'assertion suivante :

$$\forall n, m, n', m' \in \mathbb{Z}, \quad n + m\alpha = n' + m'\alpha \implies (n, m) = (n', m').$$

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que cette assertion soit vraie.

Dans les deux questions suivantes, on suppose que α est rationnel et on écrit $\alpha = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

4. Montrer qu'il existe un réel $d > 0$, que l'on précisera, tel que $G_\alpha = d\mathbb{Z} = \{nd, n \in \mathbb{Z}\}$.
5. La partie G_α est-elle dense dans $\mathbb{R}$?

B. Le cas α irrationnel

Dans cette partie, on suppose que α est irrationnel. On rappelle que, si x est un réel, on désigne par $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ sa partie fractionnaire.

6. Montrer que, pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k \neq \ell \implies \{k\alpha\} \neq \{\ell\alpha\}$.

On fixe $N \in \mathbb{N}^*$.

7. Montrer qu'il existe $r, s \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tels que $0 < |\{r\alpha\} - \{s\alpha\}| < \frac{1}{N}$.
8. En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tels que $|q\alpha - p| < \frac{1}{N}$.
9. Montrer que la partie G_α est dense dans $\mathbb{R}$.

On dit qu'un couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est une *bonne approximation* de α lorsque

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

10. Montrer que, si $q \geq 2$, il existe au plus un $p \in \mathbb{Z}$ tel que (p, q) soit une bonne approximation de α .
11. Montrer qu'il existe une infinité de bonnes approximations de α .

C. Vers l'équation de Pell

Dans cette partie, on fixe $\alpha = \sqrt{2}$, dont l'irrationalité est supposée connue.

12. Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ une bonne approximation de $\sqrt{2}$. Montrer que

$$|p^2 - 2q^2| < \frac{p + q\sqrt{2}}{q}.$$

13. En déduire que, si q est suffisamment grand, $p^2 - 2q^2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$.
14. Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p^2 - 2q^2 = 2\varepsilon$, où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
Construire simplement, à partir de (p, q) , un couple $(u, v) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $u^2 - 2v^2 = -\varepsilon$.
15. Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p^2 - 2q^2 = -1$.
Construire, à partir de (p, q) , un couple $(u, v) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $u^2 - 2v^2 = 1$.
On pourra remarquer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x^2 + 2y^2)^2 - 8x^2y^2 = (x^2 - 2y^2)^2.$$

16. En déduire qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que

$$p^2 - 2q^2 = 1.$$

Problème 2 – Une somme trigonométrique et la valeur de $\zeta(2)$

Soit $n \geq 2$ un entier. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $u_k = \frac{1}{1 - \omega^k}$.

L'objectif du problème est de calculer différentes sommes trigonométriques et d'en déduire la

valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

A. Somme des u_k

1. Montrer que les u_k , pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, sont deux à deux distincts.
2. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $u_{n-k} = \overline{u_k} = 1 - u_k$.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1} u_k = \frac{n-1}{2}$.

B. Somme des u_k^2

On définit le polynôme $P_n = X^n - (X-1)^n$.

4. Montrer que P_n est de degré $n-1$ et expliciter les réels $p_0, \dots, p_{n-1}$ tels que

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k.$$

5. Montrer que les solutions complexes de l'équation $P_n(z) = 0$ sont exactement les u_k , pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

On admet que, dans ce cas, on a l'identité

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n-1} u_j u_k = \frac{p_{n-3}}{p_{n-1}}.$$

6. Déterminer la valeur de $\sum_{1 \leq j < k \leq n-1} u_j u_k$.

7. En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1} u_k^2 = \frac{(n-1)(5-n)}{12}$.

C. Une somme trigonométrique

8. Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, déterminer une relation simple entre u_k , u_k^2 et $|u_k|^2$.
9. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n-1} |u_k|^2$.
10. Montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{n^2-1}{3}$.
11. **Une première application.** On considère un polygone régulier de sommets $A_1, \dots, A_n$, inscrit dans un cercle de rayon R . Déterminer la valeur de

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{A_j A_k^2}.$$

D. Calcul de $\zeta(2)$

12. Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq x \leq \tan x$.
13. En déduire que, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x} \leq \frac{1}{x^2} + 1$.
14. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} = \frac{2(n^2-1)}{3}.$$

15. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$ quand $n \rightarrow +\infty$.