

DS 1 de mathématiques – Corrigé

Exercice – Petits calculs

1. On reconnaît une équation polynomiale de degré 2, de discriminant $1^2 - 4(-1/2 + i) = 3 - 4i$. On en cherche une racine carrée $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Par identification des parties réelle, partie imaginaire et module, si $z^2 = 3 - 4i$, on a $x^2 - y^2 = 3$; $2xy = -4$ et $(x^2 + y^2)^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. On a donc $x^2 - y^2 = 3$ et $x^2 + y^2 = 5$. D'où $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$; donc $x = \pm 2$ et $y = \pm 1$. L'égalité $2xy = -4$ donne $z = \pm(2 - i)$. Réciproquement, on vérifie immédiatement que $(2 - i)^2 = 3 - 4i$.

Les solutions de l'équation sont alors données par $\frac{-1 \pm (2 - i)}{2}$. Ce sont donc $\frac{1 - i}{2}$ et $\frac{-3 + i}{2}$.

2. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par la formule de Moivre, $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}\left((\cos \theta + i \sin \theta)^n\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 3$, on trouve

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos \theta.$$

Pour $n = 4$, on trouve

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta = \cos^4(\theta) - 6\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) + (1 - \cos^2 \theta)^2,$$

$$\text{d'où } \cos(4\theta) = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1.$$

- (b) Comme $2\pi = 7\theta_0$, on a par parité et 2π -périodicité de $\cos$:

$$\cos(3\theta_0) = \cos(-3\theta_0) = \cos(-3\theta_0 + 7\theta_0) = \cos(4\theta_0).$$

- (c) Notons $P = 4X^3 - 3X$ et $Q = 8X^4 - 8X^2 + 1$. Par les questions 1 et 2, on a

$$P(\cos \theta_0) = \cos(3\theta_0) = \cos(4\theta_0) = Q(\cos \theta_0).$$

Donc, $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est racine du polynôme $R = Q - P = 8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1$.

De plus, 1 est racine de R . On cherche donc à factoriser R par $X - 1$. Après calculs (à faire), on trouve que

$$R = (X - 1)(8X^3 + 4X^2 - 4X - 1).$$

Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 1 \neq 0$, $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est racine de $8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$ par la règle du produit nul.

1 Problème – Étude de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ et équation de Pell

1.1 Propriétés générales

1. Soient $x, y \in G_\alpha$. On écrit $x = n + m\alpha$ et $y = k + \ell\alpha$ avec, $n, m, k, \ell \in \mathbb{Z}$. Alors, $x + y = (n + k) + (m + \ell)\alpha$; comme $n + k$ et $m + \ell$ sont des entiers, $x + y \in G_\alpha$. De même, $-x = (-n) + (-m)\alpha$ est dans G_α .
2. Cette assertion signifie que tous les éléments x de G_α ne peuvent s'écrire que d'une seule façon comme $x = n + m\alpha$, avec $n, m \in \mathbb{Z}$.
3. On montre que cette assertion est équivalente à l'irrationalité de α .
 - Si α est rationnel, on peut l'écrire $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$0 + 0\alpha = (-p) + q\alpha.$$

Comme $(0, 0) \neq (-p, q)$, l'assertion est donc fausse.

- Réciproquement, on suppose l'assertion fausse. On peut donc trouver deux couples distincts (n, m) et (n', m') tels que $n + m\alpha = n' + m'\alpha$. Si m était égal à m' , on aurait immédiatement $n = n'$, et donc $(n, m) = (n', m')$, ce qui est exclu ; donc $m \neq m'$. Mais alors, $\alpha = \frac{n - n'}{m - m'}$ est rationnel, ce qui conclut.
4. On va montrer que $G_\alpha = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.
 - D'une part, si $x \in G_\alpha$, on peut l'écrire $x = n + m\frac{p}{q}$, avec $n, m \in \mathbb{Z}$. En réduisant au même dénominateur, $x = \frac{qn + mp}{q} \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$, montrant l'inclusion $G_\alpha \subset \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.
 - D'autre part, soit $x \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$. On peut l'écrire $x = \frac{k}{q}$, où $k \in \mathbb{Z}$. Comme p et q sont premiers entre eux, on peut trouver deux entiers u, v tels que $pu + qv = 1$. En multipliant par $\frac{k}{q}$, on a donc $\frac{k}{q} = kv + ku\frac{p}{q} = kv + ku\alpha$. Comme kv et ku sont entiers, cela montre que $\frac{k}{q} \in G_\alpha$, d'où l'inclusion $\frac{1}{q}\mathbb{Z} \subset G_\alpha$, et finalement l'égalité entre ces deux ensembles.
 5. L'intervalle $]0, \frac{1}{q}[$ ne contient aucun élément de G_α d'après la question précédente. Ainsi, G_α n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

1.2 Le cas α irrationnel

6. Soient k, ℓ deux entiers naturels. On suppose par contraposition que $\{k\alpha\} = \{\ell\alpha\}$. Alors, $k\alpha - [k\alpha] = \ell\alpha - [\ell\alpha]$. Comme $[k\alpha]$ et $[\ell\alpha]$ sont des entiers et que α est irrationnel, la question 3 montre que $k = \ell$, ce qu'on voulait.

7. On découpe l'intervalle $[0, 1[$ en les N sous-intervalles $[k/N, (k+1)/N[$, pour $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. Les $N+1$ réels distincts $\{p\alpha\}$, pour $p \in \llbracket 0, N \rrbracket$ appartiennent chacun à un de ces sous-intervalles ; nécessairement, un des intervalles contient deux de ces réels, qu'on note $\{r\alpha\}$ et $\{s\alpha\}$. Comme ces deux réels sont distincts, on a bien $0 < |\{r\alpha\} - \{s\alpha\}|$; comme ces deux réels sont dans un intervalle de longueur $1/N$ et que la borne de droite de cet intervalle est exclue, on a $|\{r\alpha\} - \{s\alpha\}| < 1/N$.
8. Avec les notations précédentes, on a :

$$|r\alpha - \lfloor r\alpha \rfloor - s\alpha + \lfloor s\alpha \rfloor| < \frac{1}{N}.$$

Quitte à échanger r et s , on peut supposer que $s \leq r$. On note $q = r - s$ et $p = \lfloor r\alpha \rfloor - \lfloor s\alpha \rfloor$. Comme $r, s \in \llbracket 0, N \rrbracket$ et que r et s sont distincts, $q \in \llbracket 1, N \rrbracket$; de plus $p \in \mathbb{Z}$ car c'est la différence de deux parties entières. On a $|q\alpha - p| < \frac{1}{N}$, ce qui conclut.

9. Soient $x < y$ deux réels ; notons $\delta = y - x$. On fixe N suffisamment grand tel que $\frac{1}{N} < \delta$. Avec les notations de la question précédente, $u = q\alpha - p$ est un élément non nul de G_α tel que $|u| < \frac{1}{N}$. Quitte à changer u en son opposé, on peut supposer que $u > 0$. On considère maintenant $I = \{k \in \mathbb{Z} \mid ku \leq x\}$. Par définition, un entier k est dans I ssi $k \leq \frac{x}{u}$; donc I a un plus grand élément, qui est $k_0 = \lfloor \frac{x}{u} \rfloor$. On a donc $k_0 u \leq x < (k_0 + 1)u$. Comme $u < y - x$, l'inégalité de gauche implique $(k_0 + 1)u < y$ et donc $(k_0 + 1)u \in]x, y[$. Comme $k_0 u = (k_0 q)\alpha - k_0 p \in G_\alpha$, ceci montre que G_α est dense dans $\mathbb{R}$.
10. Soit $q \geq 2$. Soient $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ tels que (p_1, q) et (p_2, q) soient de bonnes approximations de α . Alors,

$$\left| \frac{p_1}{q} - \frac{p_2}{q} \right| = \left| \left(\frac{p_1}{q} - \alpha \right) - \left(\frac{p_2}{q} - \alpha \right) \right| \leq \left| \alpha - \frac{p_1}{q} \right| + \left| \alpha - \frac{p_2}{q} \right| < \frac{2}{q^2}.$$

En simplifiant par $q > 0$, on a donc $|p_1 - p_2| < \frac{2}{q} \leq 1$. Comme $p_1 - p_2$ est un entier, on a nécessairement $p_1 = p_2$, ce qui conclut.

11. Considérons des bonnes approximations $(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Notons δ le minimum des quantités $|\alpha - \frac{p}{q}|$; notons que $\delta > 0$ car α est irrationnel. On considère alors $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \delta$.

Par la question 8, on trouve $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $|q\alpha - p| < \frac{1}{N}$. En divisant par q et en remarquant que $qN \geq q^2$, il vient :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN} \leq \frac{1}{q^2}.$$

De plus, le couple (p, q) ainsi trouvé n'est pas l'un des (p_k, q_k) car $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qN} \leq \frac{1}{N} < \delta$. On a donc montré que, étant donné un nombre fini de bonnes approximations de α , on pouvait en trouver une autre. Ceci montre qu'il existe une infinité de bonnes approximations de α .

1.3 Vers l'équation de Pell

12. On a $|p^2 - 2q^2| = |p - q\sqrt{2}||p + q\sqrt{2}|$. Par hypothèse, $|p - q\sqrt{2}| < \frac{1}{q}$; de plus $p + q\sqrt{2} > 0$ car $p, q \in \mathbb{N}^*$. Ainsi,

$$|p^2 - 2q^2| < \frac{p + q\sqrt{2}}{q}.$$

13. Le membre de droite peut être réécrit $\frac{p}{q} + \sqrt{2}$. Comme (p, q) est une bonne approximation de $\sqrt{2}$, on a $\frac{p}{q} = \frac{p}{q} - \sqrt{2} + \sqrt{2} < \frac{1}{q^2} + \sqrt{2}$ et donc :

$$|p^2 - 2q^2| < \frac{1}{q^2} + 2\sqrt{2}.$$

Comme $2\sqrt{2} < 3$, on a aussi $\frac{1}{q^2} + 2\sqrt{2} < 3$ si q est assez grand. Donc, pour q assez grand, $|p^2 - 2q^2| < 3$. Comme $p^2 - 2q^2$ est un entier non nul (irrationalité de $\sqrt{2}$), on a nécessairement $p^2 - 2q^2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

14. Comme $p^2 - 2q^2$ est pair, p^2 est pair, donc p aussi. On écrit $p = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, $4k^2 - 2q^2 = 2\varepsilon$ et donc, $q^2 - 2k^2 = -\varepsilon$. Ainsi, le couple $(u, v) = (q, p/2)$ convient.

15. On pose $u = p^2 + 2q^2$ et $v = 2pq$. Alors,

$$u^2 - 2v^2 = (p^2 + 2q^2)^2 - 8p^2q^2 = (p^2 - 2q^2)^2 = 1.$$

Ainsi, le couple $(u, v) = (p^2 + 2q^2, 2pq)$ convient.

16. Remarquons déjà que si (p, q) est une bonne approximation de $\sqrt{2}$ et si $q \geq 2$, alors $p \geq q$. En effet, sinon on aurait $\frac{p}{q} \leq 1$, donc

$$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{q^2} > \left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right| \geq \sqrt{2} - 1,$$

ce qui est faux.

Soit (p, q) une bonne approximation de $\sqrt{2}$, avec q suffisamment grand (comme dans Q13). On sait que $p^2 - 2q^2$ vaut ± 2 ou ± 1 . D'après les deux questions précédentes, on a l'une des égalités suivantes :

- $p^2 - 2q^2 = 1$;
- $(p^2 + 2q^2) - 2(2pq)^2 = 1$;
- $q^2 - 2(p/2)^2 = 1$;
- $(q^2 + p^2/2)^2 - 2(pq)^2 = 1$.

selon la valeur de $p^2 - 2q^2$ (dans l'ordre : 1 ; -1 ; -2 ; 2), avec p pair dans les deux dernières égalités. Comme $p \geq q$, on a ainsi un couple $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $x^2 - 2y^2 = 1$ avec y valant au moins $q/2$.

Or, on sait qu'il y a une infinité de couples (p, q) qui sont des bonnes approximations de $\sqrt{2}$ et que, si $q \geq 2$, un même q ne peut donner qu'une bonne approximation. En prenant des q arbitrairement grands, on construit ainsi une infinité de solutions à l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.

Problème 2 – Une somme trigonométrique et la valeur de $\zeta(2)$

A. Somme des u_k

1. Soient $k, \ell \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tels que $u_k = u_\ell$. Comme $\omega^k = 1 - \frac{1}{u_k}$ (et de même pour ω^ℓ), on a aussi $\omega^k = \omega^\ell$. Donc $\frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2\ell\pi}{n} [2\pi]$. Comme $k, \ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a nécessairement $k = \ell$.
2. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On a

$$u_{n-k} = \frac{1}{1 - \omega^{n-k}} = \frac{1}{1 - \omega^{-k}} = \frac{1}{1 - \omega^k} = \overline{u_k}.$$

On a utilisé que $\omega^n = 1$ et que $\omega^{-1} = \bar{\omega}$ car ω est de module 1.

$$\text{On a } u_k = \frac{1}{1 - \omega^k} = \frac{1}{e^{ik\pi/n}(e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n})} = e^{-ik\pi/n} \frac{-i}{2 \sin(k\pi/n)} = \frac{e^{-i(k\pi/n - \pi/2)}}{2 \sin(k\pi/n)}.$$

$$\text{Donc, } u_k + \overline{u_k} = \frac{2 \cos(k\pi/n - \pi/2)}{2 \sin(k\pi/n)} = 1, \text{ ce qui conclut.}$$

3. On note S cette somme. Alors, par retournement,

$$2S = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + \sum_{k=1}^{n-1} u_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} (u_k + u_{n-k}) = \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-1.$$

$$\text{Donc, } S = \frac{n-1}{2}.$$

B. Somme des u_k^2

4. On développe P_n par le binôme de Newton.

$$P_n = X^n - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k.$$

Ainsi, P_n est de degré $n-1$ et les réels p_k sont donnés par $p_k = \binom{n}{k} (-1)^{n-k}$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

5. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\iff z^n - (z-1)^n = 0 \\ &\iff \left(\frac{z-1}{z} \right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : 1 - \frac{1}{z} = \omega^k \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket : z = \frac{1}{1 - \omega^k} = u_k. \end{aligned}$$

On a pu éliminer le $k = 0$ dans la dernière équivalence par l'équation $1 - \frac{1}{z} = \omega^0$ n'a pas de solution.

De plus, $z = 1$ n'est pas solution de $P_n(z) = 0$. On en déduit que les solutions complexes de $P_n(z) = 0$ sont exactement les u_k pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

6. Avec les formules trouvées pour les coefficients Q4 et la relation admise, on a :

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n-1} u_j u_k = \frac{p_{n-3}}{p_{n-1}} = \frac{-\binom{n}{3}}{-\binom{n}{1}} = \frac{(n-1)(n-2)}{6}.$$

7. On utilise la relation suivante :

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} u_j \right)^2 = \sum_{1 \leq j, k \leq n-1} u_j u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n-1} u_j u_k.$$

Avec les formules trouvées précédemment, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k^2 = \frac{(n-1)^2}{4} - 2 \frac{(n-1)(n-2)}{6} = (n-1) \left(\frac{n-1}{4} - \frac{2(n-2)}{6} \right) = \frac{n-1}{12} (3n-3-4n+8).$$

Après simplification, on a bien $\sum_{k=1}^{n-1} u_k^2 = \frac{(n-1)(5-n)}{12}$.

C. Une somme trigonométrique

8. Par la question 2, $u_k + \overline{u_k} = 1$. On multiplie par u_k et on obtient :

$$u_k^2 + |u_k|^2 = u_k.$$

9. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n-1} |u_k|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_k^2) = \frac{n-1}{2} - \frac{(n-1)(5-n)}{12} = \frac{n-1}{2} \left(1 - \frac{5-n}{6} \right) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}.$$

10. Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $|u_k|^2 = \frac{1}{4 \sin^2(k\pi/n)}$, grâce aux calculs de la question 2.

Ainsi, la question précédente donne :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2(k\pi/n)} = \frac{n^2-1}{3}.$$

11. On commence par traiter le cas où le polygone a pour sommets les racines n -èmes de l'unité. Disons que A_n a pour affixe 1. La somme

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{A_k A_n^2}$$

$$\text{vaut } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|1 - e^{2ik\pi/n}|^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4 \sin^2(k\pi/n)} = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Par invariance par rotation, si $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les autres sommes $\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{1}{A_j A_k^2}$ valent aussi

$$\frac{(n^2 - 1)}{12}. \text{ Ainsi,}$$

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{A_j A_k^2} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \neq k \leq n} \frac{1}{A_j A_k^2} = \frac{n(n^2 - 1)}{24}.$$

Dans le cas général, on remarque qu'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon R peut être obtenu comme image du polygone qu'on vient de considérer par la composée d'une rotation, d'une translation et d'une homothétie de rapport R . Les deux premières transformations laissent les longueurs inchangées, la dernière les multiplie par R . On a donc en général :

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{A_j A_k^2} = \frac{n(n^2 - 1)}{24R^2}.$$

D. Calcul de $\zeta(2)$

1. On définit f sur $[0, \pi/2[$ par $f(x) = x - \sin x$. C'est une fonction dérivable, de dérivée $f' : x \mapsto 1 - \cos x \geq 0$. Ainsi, f est croissante sur $[0, \pi/2[$ et $f(0) = 0$. Donc, f est positive, ce qui montre la première inégalité.
Pour la deuxième, on définit g sur $[0, \pi/2[$ par $g(x) = \tan x - x$. On a maintenant $g' : x \mapsto \tan^2 x$, de sorte que g est croissante. Comme $g(0) = 0$, g est positive et on a la deuxième inégalité.

2. Soit $x \in]0, \pi/2[$. De $\sin x \leq x$, on déduit $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}$ en prenant l'image par la fonction $y \mapsto \frac{1}{y^2}$, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De même, $\frac{1}{\tan^2 x} \leq \frac{1}{x^2}$. Comme $\frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, on en déduit la deuxième inégalité.

3. Soit $n \geq 2$. En appliquant la question 10 à $2n$, on a

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} = \frac{4n^2 - 1}{3}.$$

Or, si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right) = \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2n}\right)}.$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} = \frac{1}{2} \left(\frac{4n^2 - 1}{3} - 1 \right) = \frac{2(n^2 - 1)}{3}.$$

4. Soit $n \geq 2$. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Comme $\frac{k\pi}{2n} \in]0, \pi/2[$, on peut appliquer la question 13 à ce réel :

$$\frac{4n^2}{k^2\pi^2} \leq \frac{1}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n})} \leq \frac{4n^2}{k^2\pi^2} + 1.$$

On multiplie par $\frac{\pi^2}{4n^2}$ et on somme pour k allant de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi^2}{4n^2 \sin^2(\frac{k\pi}{2n})} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{(n-1)\pi^2}{4n^2}.$$

En utilisant la formule de la question 14 et en encadrant plutôt $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$, on obtient :

$$\frac{\pi^2(n^2-1)}{6n^2} - \frac{(n-1)\pi^2}{4n^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2(n^2-1)}{6n^2}.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, les deux membres extrêmes convergent vers $\frac{\pi^2}{6}$. Par théorème d'encadrement, on a donc aussi $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$. Et donc, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2}$ aussi.