

## DM 4 - Fonctions absolument monotones

### 1 Généralités

1. Si  $f$  est absolument monotone, elle est positive en appliquant la définition pour  $n = 0$ . De plus, sa dérivée est positive, en appliquant la définition pour  $n = 1$ . Donc,  $f$  est croissante.
2. Par récurrence. Sera fait plus tard en cours.
3. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions absolument monotones sur  $I$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $x \in I$ . Alors,

$$(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0$$

car  $f^{(n)}(x)$  et  $g^{(n)}(x)$  sont positifs par hypothèse. Donc  $f + g$  est absolument monotone.

De plus,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Tous les termes dans la somme sont positifs par hypothèse, donc  $fg$  est absolument monotone.

4. Soit  $f$  une fonction absolument monotone. Considérons pour  $n \in \mathbb{N}$  la propriété  $\mathcal{P}(n)$  :  $(\exp(f))^{(n)} \geq 0$ . Montrons que  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ , par récurrence forte.

- Initialisation : pour  $n = 0$ ,  $\exp(f)$  est bien une fonction positive.
- Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \leq n$ ,  $\mathcal{P}(k)$  est vraie. On a  $\exp(f)' = f' \exp(f)$ .  
Donc :

$$(\exp(f))^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} (\exp(f))^{(n-k)}.$$

Par hypothèse de récurrence, et comme  $f$  est absolument monotone, tous les termes sont positifs. Donc  $(\exp(f))^{(n+1)}$  est positive, ce qui conclut la récurrence.

Ainsi,  $\exp(f)$  est absolument monotone.

5. Il n'y a pas de réciproque : la fonction  $f = \ln$  n'est pas absolument monotone sur  $\mathbb{R}_+^*$  (car sa dérivée seconde est négative), mais  $g = \exp(f) : x \mapsto x$  est absolument monotone ( $g$  et  $g'$  sont positives et les dérivées  $g^{(k)}$  sont nulles pour  $k \geq 2$ ).

### 2 La fonction arcsinus est absolument monotone sur $]0, 1[$ .

6. Pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on peut réécrire

$$g(x) = \frac{1}{2}((1-x)^{-1} - (1+x)^{-1}).$$

Par une récurrence rapide, on en déduit la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]0, 1[, g^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left( \prod_{i=1}^n (-i) \times (-1)^n (1-x)^{-1-n} - \prod_{i=1}^n (-i) \times (1+x)^{-1-n} \right).$$

D'où, après simplifications :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]0, 1[, g^{(n)}(x) = \frac{n!}{2} \left( \frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} \right).$$

7. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $x \in ]0, 1[$ . On doit montrer que

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} \geq 0.$$

Si  $n$  est impair, on a une somme de termes positifs et l'inégalité est évidente.

Si  $n$  est pair, c'est équivalent à :

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} \geq \frac{1}{(1+x)^{n+1}}.$$

La fonction  $y \mapsto \frac{1}{y^{n+1}}$  étant strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , c'est encore équivalent à

$$1-x \leq 1+x,$$

ce qui est vrai car  $x$  est positif.

Donc  $g$  est absolument monotone.

8. Pour  $x \in ]0, 1[$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x) \times \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ . Donc,

$$(\ln(f))'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{1-x^2} = g(x).$$

D'après la question précédente, on a  $(\ln(f))'$  est donc absolument monotone. De plus, pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $f(x) \geq 1$  car  $\sqrt{1-x^2} \geq 1$  et donc  $\ln f \geq 0$ . On en déduit que  $\ln(f)$  est absolument monotone.

D'après la question 3, on en déduit que  $f$  est absolument monotone.

9. L'application  $f$  est la dérivée de Arcsin sur  $]0, 1[$ . Comme Arcsin est positive sur  $]0, 1[$  et que  $f$  est absolument monotone, Arcsin est absolument monotone sur  $]0, 1[$ .

### 3 Différences finies

10. On calcule :

$$\begin{aligned} \Delta_h^2(f)(x) &= \Delta_h(f)(x+h) - \Delta_h(f)(x) \\ &= (f(x+2h) - f(x+h)) - (f(x+h) - f(x)) \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x). \end{aligned}$$

11. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{P}(n)$  l'assertion selon laquelle la formule de l'énoncé est valide pour tous  $x, h \in \mathbb{R}$ . On la montre par récurrence.

- Pour  $n = 0$ , soient  $x, h \in \mathbb{R}$ . Alors,  $\Delta_h^0(f)(x) = f(x)$  et la somme de droite se simplifier aussi en  $f(x)$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Soient  $x, h \in \mathbb{R}$ . On calcule :

$$\begin{aligned}
 \Delta_h^{n+1}(f)(x) &= \Delta_h^n(f)(x+h) - \Delta_h^n(f)(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+h+kh) - \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh) \\
 &= \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{n-\ell+1} \binom{n}{\ell-1} f(x+\ell h) - \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh) \\
 &= f(x+(n+1)h) - f(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^{(n+1-k)} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f(x+kh) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{(n+1)-k} \binom{n+1}{k} f(x+kh),
 \end{aligned}$$

par la relation de Pascal.

*On remarquera que, comme on a besoin pour l'hérédité d'appliquer la formule en  $x$  et en  $x+h$ , il est important de ne pas travailler à  $x$  et  $h$  fixés. La formule de récurrence doit porter sur tous les  $x, h \in \mathbb{R}$  en même temps. En revanche, on peut fixer  $f$ .*

#### 4 Absolument monotone $\implies$ totalement monotone

12. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On utilise la question 13 : pour tout  $h \in \mathbb{R}$ ,

$$X_{n+1}(h) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} f(x+kh).$$

Comme  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $X_{n+1}$  est dérivable en  $h$  et :

$$X'_{n+1}(h) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} \times k \times f'(x+kh).$$

Or, par la formule du chef,  $k \binom{n+1}{k} = (n+1) \binom{n}{k-1}$  pour  $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$  (pour  $k=0$ , les deux termes valent 0). Donc,

$$X'_{n+1}(h) = (n+1) \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \binom{n}{\ell} f'(x+(\ell+1)h).$$

En utilisant de nouveau la question 13, on a donc :

$$X'_{n+1}(h) = (n+1) \Delta_h^n(f')(x+h).$$

13. D'après la question précédente, l'hypothèse  $\Delta_h^n(f') \geq 0$  si  $h > 0$  implique que, pour tout  $h > 0$ ,  $X'_{n+1}(h) \geq 0$ . Dès lors,  $X_{n+1}$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Or,  $X_{n+1}(0) = \Delta_0^{n+1}(f)(x) = 0$ . Donc,  $X_{n+1}(h) \geq 0$  pour tout  $h > 0$ . Comme c'est vrai pour tout  $x$ , on a  $\Delta_h^{n+1}(f) \geq 0$ .
14. Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Une récurrence immédiate avec la question précédente montre que si  $n, k \in \mathbb{N}$  et si  $\Delta_h^n(f^{(k)}) \geq 0$  pour tout  $h > 0$ , alors  $\Delta_h^{n+k}(f) \geq 0$ , pour tout  $h > 0$ .
- Supposons  $f$  absolument monotone. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Avec  $n = 0$ , dans le résultat précédent, comme  $\Delta_h^0(f^{(k)}) = f^{(k)} \geq 0$ , on en déduit que  $\Delta_h^k(f) \geq 0$ . Donc,  $f$  est totalement monotone.

## 5 Totalement monotone $\implies$ absolument monotone

15. Soit  $f$  totalement monotone. En appliquant la définition avec  $n = 0$  et  $n = 1$ , on a  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0, \Delta_h^0(f)(x) = f(x) \geq 0$  et  $\Delta_h^1(f)(x) = f(x+h) - f(x) \geq 0$ .

Ainsi,  $f$  est positive et croissante : en effet, la deuxième assertion est équivalente à

$$\forall x < y, f(y) \geq f(x).$$

16. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $x \in \mathbb{R}$ , soit  $h > 0$ . On sait que

$$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+hk).$$

On applique la formule de Taylor-Lagrange à la fonction  $f$ , entre  $x$  et  $x+hk$ . Il existe donc  $c_k \in ]x, x+hk[$  tel que :

$$f(x+hk) = \sum_{i=0}^n \frac{(kh)^i}{i!} f^{(i)}(x) + \frac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_k).$$

On substitue et on intervertit les sommes :

$$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{i=0}^n \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x) \left( \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^i \right) + \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_k)$$

D'après la question précédente, la somme  $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^i$  vaut 0, sauf si  $i = n$ , où elle vaut  $n!$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \Delta_h^n(f)(x) &= h^n f^{(n)}(x) + \frac{(-1)^n h^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^{n+1} f^{(n+1)}(c_k) \\ &= h^n \left( f^{(n)}(x) + h \times \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^{n+1} f^{(n+1)}(c_k) \right). \end{aligned}$$

Quand  $h$  tend vers  $0^+$ , on affirme que la quantité entre parenthèses tend vers  $f^{(n)}(x)$ . En effet, quand  $h$  tend vers  $0^+$ ,  $c_k \in ]x, x+hk[$  tend vers  $x$  et donc la somme est bornée. Donc, le terme avec le  $h$  en facteur tend vers 0 quand  $h$  tend vers  $0^+$ .

On en déduit que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Delta_h^n(f)(x)}{h^n} = f^{(n)}(x)$ . Et donc, par passage à la limite dans les inégalités,  $f^{(n)}(x) \geq 0$  si pour tout  $h > 0$ ,  $\Delta_h^n(f)(x) \geq 0$ .

Donc, si  $f$  est totalement monotone, elle est absolument monotone.