

Fonctions usuelles

1 Généralités sur les fonctions

EXERCICE 1. ●○○ Étude de parité

Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$1. f_1(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1};$$

$$2. f_2(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|;$$

$$3. f_3(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x).$$

EXERCICE 2. ●○○ Étude de fonctions

Étudier les fonctions suivantes :

$$1. f_1(x) = \frac{1}{x} \exp\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$3. f_3(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1};$$

$$2. f_2(x) = x^{-\ln x};$$

$$4. f_4(x) = \sqrt{\frac{|\ln(x)|}{x}}.$$

EXERCICE 3. ●○○ $f \circ f$ croissante et $f \circ f \circ f$ décroissante

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

EXERCICE 4. ♣ – ●○○ Calcul de limites

Étudier les limites suivantes :

$$1. \frac{\sin^2(\frac{1}{x})}{x} \text{ en } 0;$$

$$7. x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ en } +\infty;$$

$$2. \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{(\lfloor x \rfloor)^2} \text{ en } +\infty;$$

$$8. x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ en } 0;$$

$$3. \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} \text{ en } a;$$

$$9. \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ en } +\infty;$$

$$4. \frac{\sin \sqrt{x}}{\ln x} \text{ en } 0^+;$$

$$10. \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \text{ en } 1;$$

$$5. \cos(x^2) \text{ en } +\infty;$$

$$11. \sqrt{x^2 + 2x} - x \text{ en } +\infty;$$

$$6. \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \text{ en } +\infty;$$

$$12. \ln x \ln(\ln x) \text{ en } 1.$$

EXERCICE 5. ♣/◇ – ●●○ Une fonction avec beaucoup de périodes

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non constante, admettant des périodes strictement positives arbitrairement petites.

EXERCICE 6. ●●● Une équation fonctionnelle

Montrer qu'il existe une unique fonction monotone $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right) \text{ et } f(x) + f(1-x) = 1.$$

EXERCICE 7. ♣/◇ – ●●● Fonction de Dirichlet

On note $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ la fonction de Dirichlet, définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^{2n}(2\pi x m!)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de suite (f_n) de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 Fonctions exponentielle et logarithme**EXERCICE 8. ●○○** Une équation avec des puissances

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

EXERCICE 9. ●○○ Un produit infini

1. Montrer que $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la limite de $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

EXERCICE 10. ◇ – ●○○ Irrationalité de $\frac{\ln 2}{\ln 3}$

Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel. Généraliser.

EXERCICE 11. ●○○ Étude de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

On définit f sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1. Faire l'étude de f .
2. En déduire les couples $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, solutions de $a^b = b^a$.
3. Déterminer, selon $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de solutions de l'équation $e^x = x^n$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer la valeur maximale de $\sqrt[n]{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 12. $\diamond - \bullet \bullet \circ$ *L'exponentielle, comme somme d'une série*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'encadrement suivant :

$$\forall x \in [0, n], \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}.$$

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

3. En déduire la formule : $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

EXERCICE 13. $\clubsuit - \bullet \bullet \circ$ *Irrationalité de e*

Le but de l'exercice est de montrer que e est irrationnel. On rappelle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier naturel a_n tel que $a_n < n!e < a_n + 1$.
2. Conclure.

EXERCICE 14. $\clubsuit / \diamond - \bullet \bullet \circ$ *Inégalités de Young et Hölder*

Soit $p > 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On dit que q est l'exposant conjugué de p .

On fixe un tel couple $(p, q) \in]1, +\infty[^2$.

2. Montrer l'inégalité de Young : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

3. Montrer l'inégalité de Hölder : $\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}, \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}$.

3 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

EXERCICE 15. $\circ \circ \circ$ $\sin(nx)$

Montrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n , $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.

EXERCICE 16. $\bullet \circ \circ$ *Formules d'addition en trigonométrie hyperbolique*

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Proposer et démontrer des formules pour $\text{ch}(x+y)$, $\text{sh}(x+y)$ et $\text{th}(x+y)$.

EXERCICE 17. $\clubsuit / \diamond - \bullet \circ \circ$ *Somme de fonctions hyperboliques*

Soient a, b deux réels. Simplifier $C_n = \sum_{k=0}^n \text{ch}(a+kb)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \text{sh}(a+kb)$.

EXERCICE 18. ●○○ Une somme d'arctangentes

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2 + p + 1}\right)$.
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \arctan\left(\frac{1}{p^2 + p + 1}\right)$.

EXERCICE 19. ♣/◇ – ●●○ Fonctions trigonométriques et réciproques

Déterminer l'ensemble de définition et simplifier les expressions suivantes :

- | | | |
|--|---|----------------------------------|
| 1. $\sin(\arccos x)$; | 4. $\cos(2 \arcsin x)$; | 7. $\tan(\arcsin x)$; |
| 2. $\sin(\arctan x)$; | 5. $\cos(2 \arctan x)$; | 8. $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$; |
| 3. $\arccos\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)$; | 6. $\cos\left(\frac{\arcsin x}{2}\right)$; | 9. $\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$. |

EXERCICE 20. ♣ – ●●○ Formule de Machin

1. Montrer que $\frac{(5+i)^4}{239+i} = 2(1+i)$.
2. En déduire que $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$.
3. Montrer l'égalité $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 21. ♣/◇ – ●●○ Formule d'addition des arctangentes

Soient x et y deux réels tels que $xy \neq 1$.

1. Montrer que $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + k\pi$, où $k = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ 1 & \text{si } xy > 1, x > 0 \\ -1 & \text{si } xy > 1, x < 0 \end{cases}$.
2. Utiliser cette formule pour redémontrer la formule de Machin.

EXERCICE 22. ♣/◇ – ●●○ Parmi 7 réels...

On se donne 7 réels $x_1, \dots, x_7$. Montrer qu'on peut trouver deux indices $1 \leq i \neq j \leq 7$ tels que

$$0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4 Calcul différentiel

EXERCICE 23. ○○○ Calcul de dérivées

Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes. Puis calculer les dérivées :

1. $f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$;
2. $f_2(x) = \frac{\sin x}{(\cos x + 2)^4}$;
3. $f_3(x) = e^{-\frac{2}{x^2}}$;
4. $f_4(x) = \ln \left(2 + \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right)$;
5. $f_5(x) = \ln \left(\ln (\ln x) \right)$;
6. $f_6(x) = \ln \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} \right)$;
7. $f_7(x) = x^{1/x}$;
8. $f_8(x) = \operatorname{ch} x \cos x + \operatorname{sh} x \sin x$.

EXERCICE 24. ♣/◇ – ●●○ *Dérivées successives*

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ème des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{1}{x-a}$, où $a \in \mathbb{C}$;
2. $f_2(x) = \cos(3x)$;
3. $f_3(x) = x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $f_4(x) = e^x \cos x$;
5. $f_5(x) = \cos^3 x$;
6. $f_6(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

EXERCICE 25. ●●○ *Dérivées successives de arctan*

On pose $f = \arctan$. Montrer que f est indéfiniment dérivable et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin(n(\pi/2 + f(x))).$$

EXERCICE 26. ♣/◇ – ●●● *$\tan$ est absolument monotone*

Une fonction est dite absolument monotone si elle est indéfiniment dérivable et que toutes ses dérivées sont positives. Montrer que $\tan$ est absolument monotone sur $[0, \pi/2[$.

Indications

Exercice 5. On pourra utiliser la densité des rationnels.

Exercice 7. Pour 2., raisonner par l'absurde et construire une succession d'intervalles emboîtés sur lesquels f_n serait très proche de 0 ou de 1.

Exercice 10. On utilisera les résultats élémentaires d'arithmétique.

Exercice 12. Pour 1., considérer les fonctions $f_n : x \mapsto e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ et $g_n : x \mapsto e^{-x} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x_n}{n!} \right)$.

Exercice 14. Pour 3., on commencera par montrer l'inégalité dans le cas particulier où $\sum_{k=1}^n |x_k|^p =$

$\sum_{k=1}^n |y_k|^p = 1$. Puis, on s'y ramènera en homogénéisant la formule à démontrer.

Exercice 17. Considérer $C_n \pm S_n$.

Exercice 19. Utiliser le formulaire de trigonométrie pour faire apparaître des composées d'une fonction et de sa bijection réciproque. On ne dérivera qu'en dernier recours.

Exercice 21. Poser $u = \arctan x$ et $v = \arctan y$ et utiliser la formule d'addition de tangente. La valeur de k est obtenue par une disjonction de cas portant sur la valeur de $u + v$.

Exercice 22. Écrire les réels comme des tangentes d'angles.

Exercice 24. Pour les calculs avec fonctions trigonométriques, on pourra penser complexes et linéarisation. Pour 6., factoriser $x^2 + 1$ en passant en complexe et décomposer la fraction.

Exercice 26. Calculer les premières dérivées et établir par récurrence la forme générale des dérivées supérieures.