

DS n° 2 – Mathématiques

Durée : 4 heures

Consignes. Les calculatrices et autres technologies sont interdites. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement. La copie doit être lisible, les calculs suffisamment détaillés et les résultats clairement mis en valeur. Les trois problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Toute erreur d'énoncé présumée peut être signalée pendant l'épreuve.

Problème 1. Irrationalité de e^r pour $r \in \mathbb{Q}^*$

L'objectif du problème est de montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}^*, e^r \notin \mathbb{Q}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, on définit

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{-x}^x (x^2 - t^2)^n e^t dt \quad \text{et} \quad J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{-x}^x t(x^2 - t^2)^n e^t dt.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

1. Calculer $I_0(x)$ et $J_0(x)$.
2. Montrer que $I_n(x) = 2J_{n-1}(x)$.
3. Montrer que $J_n(x) = -(2n+1)I_n(x) + 2x^2I_{n-1}(x)$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes A_n et B_n à coefficients entiers et de degré au plus n tels que

$$\forall x > 0, I_n(x) = A_n(x)e^x + B_n(x)e^{-x}.$$

5. Montrer l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad 0 < I_n(x) \leq \frac{x^{2n}I_0(x)}{n!}.$$

En déduire que, pour tout $x > 0$, $I_n(x) \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow +\infty$.

On fixe $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose par l'absurde que $e^r \in \mathbb{Q}$ et on note $e^r = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

6. Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $pqI_n(r) \in \mathbb{Z}$.
7. Aboutir à une contradiction et conclure.

Problème 2. Fonction de Gudermann

A. Propriétés générales

On définit la fonction de Gudermann par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{gd}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\text{ch } t}.$$

1. Montrer que gd est impaire, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser sa dérivée.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{gd}(x) = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}.$$

3. En déduire les limites de gd en $+\infty$ et en $-\infty$. Esquisser son graphe.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\text{gd}(x)) = \frac{1}{\text{ch } x}.$$

B. Étude de la bijection réciproque

5. Montrer que gd réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$. Montrer que, pour tout $\theta \in I$,

$$\text{gd}^{-1}(\theta) = \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right).$$

6. En déduire que gd^{-1} est dérivable sur I et calculer sa dérivée en tout $\theta \in I$.
7. Retrouver ce résultat sans utiliser l'expression de $\text{gd}^{-1}(\theta)$.
8. En utilisant gd^{-1} , déterminer les fonctions y dérivables de $\mathbb{R}$ dans I telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = \cos(y(x)).$$

9. Déterminer les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = \cos(y(x)).$$

Problème 3. Intégrales elliptiques et longueur de la lemniscate

Pour tout $k \in]0, 1[$, on pose

$$\mathcal{J}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k \sin^2 \theta}}.$$

L'objectif du problème est de calculer ces intégrales et d'en déduire une formule pour la longueur de la lemniscate de Bernoulli.

A. Moyenne arithmético-géométrique

Soient $u, v > 0$. On définit deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = u$, $v_0 = v$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $v_n \leq u_n$.
2. En déduire la monotonie des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$.
3. Montrer que $u_n - v_n \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow +\infty$. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite, appelée *moyenne arithmético-géométrique* de u et v et notée $M(u, v)$.

B. Formule de Gauss

On admet provisoirement la propriété suivante des intégrales $\mathcal{J}(k)$.

Si $k \in]0, 1[$, on note $c = \sqrt{1 - k}$ et $q = \frac{1 - c}{1 + c}$. Alors, $\mathcal{J}(k) = \frac{2}{1 + c} \mathcal{J}(q^2)$.

Soient $a > b > 0$. On pose

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}$$

4. Exprimer $I(a, b)$ en fonction de $\mathcal{J}(k)$, où $k \in]0, 1[$ est un réel à déterminer.

5. On note $A = \frac{a + b}{2}$ et $G = \sqrt{ab}$. Montrer que $I(a, b) = I(A, G)$.

On définit les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme dans la partie A, avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

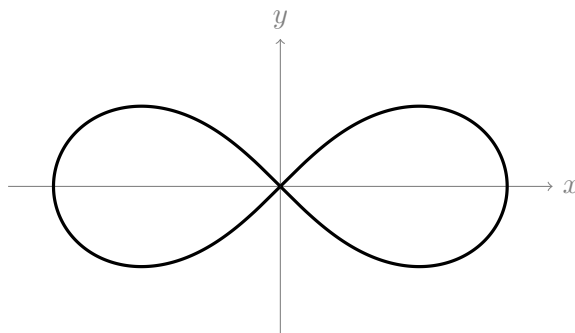
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{\pi}{2a_n} \leq I(a_n, b_n) \leq \frac{\pi}{2b_n}$$

7. En déduire une expression de $I(a, b)$ en fonction de $M(a, b)$.
8. En déduire la valeur de $\mathcal{J}(k)$, pour tout $k \in]0, 1[$, en fonction d'une moyenne arithmético-géométrique bien choisie.

C. Lemniscate de Bernoulli

La lemniscate de Bernoulli est une courbe du plan, définie comme l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.



On admet que le quart supérieur droit de cette courbe est formé des points $(x(\phi), y(\phi))$, avec $\phi \in [0, \pi/2]$, où

$$x(\phi) = \frac{\cos \phi}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \phi}, \quad y(\phi) = \frac{\cos \phi \sin \phi}{\sqrt{2}}.$$

Par définition, la longueur de la courbe est

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(\phi)^2 + y'(\phi)^2} \, d\phi.$$

9. Montrer que, pour tout $\phi \in [0, \pi/2]$, $x'(\phi)^2 + y'(\phi)^2 = \frac{1}{1 + \cos^2 \phi}$.
10. En déduire une expression de L , faisant intervenir une moyenne arithmético-géométrique.

D. Transformation de Landen

On reprend les notations du début de la partie B et on souhaite montrer la formule admise. Pour tout $\varepsilon \in]0, \pi/4[$, on pose

$$\mathcal{J}_\varepsilon(k) = \int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k \sin^2 \theta}}.$$

11. On note f la fonction définie sur $]0, \pi/2[$, par $f(\theta) = \sqrt{1 - k \sin^2 \theta}$. En effectuant le changement de variable $u = f(\theta)$, montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0, \pi/4[$,

$$\mathcal{J}_\varepsilon(k) = \int_{f(\pi/2-\varepsilon)}^{f(\varepsilon)} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(u^2 - c^2)}}.$$

12. On note g la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g(u) = \frac{1 - u}{1 + u}$. En effectuant le changement de variable $v = g(u)$, montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0, \pi/4[$,

$$\mathcal{J}_\varepsilon(k) = \frac{1}{1 + c} \int_{g \circ f(\varepsilon)}^{g \circ f(\pi/2-\varepsilon)} \frac{dv}{\sqrt{v(q - v)(1 - qv)}}.$$

13. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0, \pi/4[$:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(k) = \frac{2}{1 + c} \int_{\alpha_\varepsilon}^{\beta_\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - q^2 t^2)}},$$

où $\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon \in]0, 1[$ vérifient $\alpha_\varepsilon \rightarrow 0$ et $\beta_\varepsilon \rightarrow 1$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

14. Montrer finalement que, pour tout $\varepsilon \in]0, \pi/4[$,

$$\mathcal{J}_\varepsilon(k) = \frac{2}{1 + c} \int_{\arcsin \alpha_\varepsilon}^{\arcsin \beta_\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varphi}}.$$

15. En déduire que $\mathcal{J}(k) = \frac{2}{1 + c} \mathcal{J}(q^2)$.