

DS n° 2 – Mathématiques

Corrigé

Problème 1. Irrationalité de e^r pour $r \in \mathbb{Q}^*$

1. On a $I_0(x) = \int_{-x}^x e^t dt = e^x - e^{-x}$. Pour $J_0(x)$, on fait une intégration par parties :

$$J_0(x) = \int_{-x}^x t e^t dt = x e^x - (-x e^{-x}) - \int_{-x}^x e^t dt = (x-1)e^x + (x+1)e^{-x}.$$

2. On intègre par parties dans $I_n(x)$ en dérivant $t \mapsto (x^2 - t^2)^n$ et en intégrant $t \mapsto e^t$. On a donc :

$$n! I_n(x) = (x^2 - x^2)^n e^x - (x^2 - (-x)^2)^n e^{-x} + \int_{-x}^x 2nt(x^2 - t^2)^{n-1} e^t dt = 2n(n-1)! J_{n-1}(x).$$

D'où $I_n(x) = 2J_{n-1}(x)$.

3. On fait une intégration par parties dans $J_n(x)$ en dérivant $f : t \mapsto t(x^2 - t^2)^n$ et en intégrant $t \mapsto e^t$. On a $f'(t) = (x^2 - t^2)^n - 2nt^2(x^2 - t^2)^{n-1}$. Donc,

$$n! J_n(x) = x(x^2 - x^2)^n e^x - (-x)(x^2 - (-x)^2)^n e^{-x} - \int_{-x}^x (x^2 - t^2)^n e^t dt + 2n \int_{-x}^x t^2 (x^2 - t^2)^{n-1} e^t dt.$$

Dans l'intégrale de droite, on écrit $t^2 = -(x^2 - t^2) + x^2$. Ainsi,

$$n! J_n(x) = -n! I_n(x) - 2n \times n! I_n(x) + 2nx^2(n-1)! I_{n-1}(x).$$

Après simplification par $n!$, on a bien $J_n(x) = -(2n+1)I_n(x) + 2x^2 I_{n-1}(x)$.

4. On le montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, cela résulte de la question 2 : on peut poser $A_0 = 1$ et $B_0 = -1$. Pour $n = 1$, on a $I_1(x) = 2J_0(x)$; donc $A_1 = 2(X-1)$ et $B_1 = 2(X+1)$ conviennent.
- Soit $n \geq 2$. On suppose le résultat établi aux rangs $n-1$ et $n-2$. Pour tout $x > 0$, on a

$$I_n(x) = 2J_{n-1}(x) = -2(2n-1)I_{n-1}(x) + 2x^2 I_{n-2}(x).$$

Avec les notations de l'énoncé, on peut donc écrire :

$$I_n(x) = -2(2n-1) \left(A_{n-1}(x)e^x + B_{n-1}(x)e^{-x} \right) + 2x^2 \left(A_{n-2}(x)e^x + B_{n-2}(x)e^{-x} \right).$$

En posant $A_n = 2X^2 A_{n-2} - 2(2n-1)A_{n-1}$ et $B_n = 2X^2 B_{n-2} - 2(2n-1)B_{n-1}$, on a l'expression souhaitée. De plus, A_n et B_n sont à coefficients entiers car A_{n-1} , A_{n-2} , B_{n-1} et B_{n-2} le sont et les degrés de A_n et B_n sont au maximum ceux de $n-2$ plus 2, c'est-à-dire n .

5. $I_n(x)$ est l'intégrale sur le segment $[-x, x]$ non trivial d'une fonction strictement positive, donc $I_n(x) > 0$. De plus, pour $t \in [-x, x]$, $(x^2 - t^2) \leq x^2$. Donc, $(x^2 - t^2)^n e^t \leq x^{2n} e^t$. Par propriété de croissance de l'intégrale, on en déduit que $I_n(x) \leq \frac{x^{2n}}{n!} \int_{-x}^x e^t dt$.

Par théorème d'encadrement, on veut alors montrer que pour un x fixé, $\lim_n \frac{x^{2n}}{n!} = 0$. Or, $\frac{x^{2n}}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{x^2}{k}$. Si k est plus grand qu'un certain indice $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $\frac{x^2}{k} \leq \frac{1}{2}$. Alors, si

$n \geq n_0$, $\frac{x^{2n}}{n!} \leq \prod_{k=1}^{n_0-1} \frac{x^2}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$. On a majoré $\frac{x^{2n}}{n!}$ par une suite tendant vers 0, donc cette suite tend aussi vers 0, donc $(I_n(x))$ aussi.

6. D'après la question 5., $I_n(r) = A_n(r)e^r + B_n(r)e^{-r}$, où A_n et B_n sont des polynômes à coefficients entiers de degré $\leq n$. Comme $e^r = \frac{p}{q}$, on en déduit :

$$pqI_n(r) = A_n(r)p^2 + B_n(r)q^2.$$

Comme A_n et B_n sont à coefficients entiers et que r est un entier, le membre de droite est un entier. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $pqI_n(r) \in \mathbb{Z}$.

7. Par ailleurs, d'après la question 5., $I_n(r)$ est strictement positif et tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc $pqI_n(r)$ aussi. On a donc une suite d'entiers strictement positifs tendant vers 0, ce qui est absurde.

On en déduit que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $e^r \notin \mathbb{Q}$. Considérons maintenant $\frac{p}{q}$ un rationnel strictement positif ; si on avait $e^{\frac{p}{q}}$ rationnel, alors $e^p = \left(e^{\frac{p}{q}}\right)^q$, serait aussi rationnel, ce qui n'est pas. Donc, e^r est irrationnel pour tout rationnel $r > 0$. Enfin, si $r < 0$ est un rationnel, on a $e^{-r} = \frac{1}{e^r}$, de sorte que e^{-r} est aussi irrationnel. Ceci conclut.

Problème 2. Fonction de Gudermann

A. Propriétés générales

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\text{gd}(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{\text{ch } t} = - \int_0^x \frac{du}{\text{ch } u} = -\text{gd}(x)$$

par changement de variable $u = -t$ et parité de ch . Donc, ch est impaire.

Par le théorème fondamental de l'analyse, gd est l'unique primitive de $\frac{1}{\text{ch}}$ qui s'annule en 0 ; en particulier, gd est dérivable de dérivée $\frac{1}{\text{ch}}$. Comme $\text{ch} > 0$ sur $\mathbb{R}$, gd est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

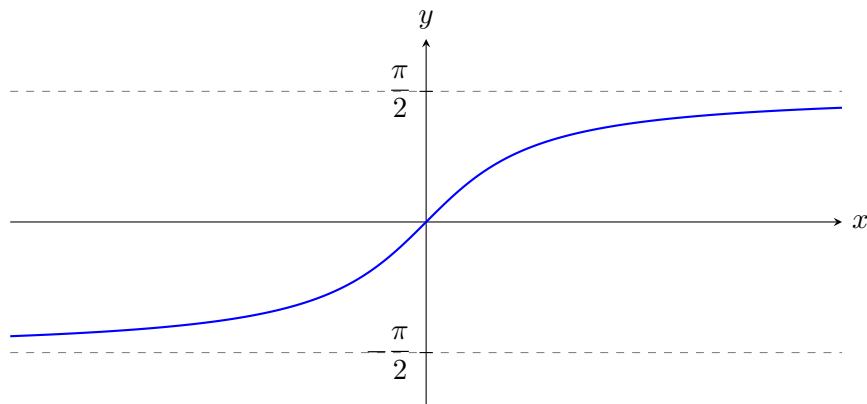
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\text{gd}(x) = \int_0^x \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt.$$

On pose $u = e^t$, de sorte que $du = e^t dt = u dt$. Alors,

$$\text{gd}(x) = 2 \int_1^{e^x} \frac{u^2 + 1}{d} u = 2(\arctan(e^x) - \arctan(1)) = 2(\arctan(e^x)) - \pi/2.$$

3. Par opération élémentaires sur les limites, $\text{gd}(x) \rightarrow 2 \times \frac{\pi}{2} - \pi/2 = \pi/2$, quand $x \rightarrow +\infty$. Comme gd est impaire, on a aussi $\text{gd}(x) \rightarrow -\pi/2$ quand $x \rightarrow -\infty$.



Cette courbe ressemble beaucoup à celle de $\arctan$, y compris pour la tangente en 0, qui est la droite d'équation $y = x$ dans les deux cas.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \cos(\text{gd}(x)) &= \cos(2 \arctan(e^x) - \pi/2) \\ &= \sin(2 \arctan(e^x)) \\ &= 2 \cos(\arctan(e^x)) \sin(\arctan(e^x)) \end{aligned}$$

Comme $\arctan(e^x) \in]0, \pi/2[$, les $\cos$ et $\sin$ dans l'expression précédente sont positifs. Donc,

$$\cos(\text{gd}(x)) = 2\sqrt{\cos^2(\arctan(e^x)) \sin^2(\arctan(e^x))}$$

Comme $\cos^2 = \frac{1}{1 + \tan^2}$ et $\sin^2 = 1 - \cos^2 = \frac{\tan^2}{1 + \tan^2}$, il vient

$$\cos(\operatorname{gd}(x)) = 2\sqrt{\frac{1}{1 + e^{2x}} \times \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}} = \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{2}{e^{-x} + e^x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

B. Étude de la bijection réciproque

5. On a montré que gd est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites $\pm\pi/2$ en $\pm\infty$. Comme elle est de plus continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans I .

Soit $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, soit $x \in \mathbb{R}$. On raisonne par équivalences.

$$\begin{aligned} \operatorname{gd}(x) = \theta &\iff 2 \arctan(e^x) - \pi/2 = \theta \\ &\iff \arctan(e^x) = \frac{\theta}{2} + \pi/4 \\ &\iff e^x = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \pi/4\right) \end{aligned}$$

Pour cette dernière équivalence, on utilise que $\arctan(e^x)$ et $\frac{\theta}{2} + \pi/4$ sont tous les deux dans $]0, \pi/2[$ et que $\tan y$ est injective. On calcule :

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\operatorname{gd}(x) = \theta \iff x = \ln\left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}\right).$$

Donc, $\forall \theta \in I, \operatorname{gd}^{-1}(\theta) = \ln\left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}\right)$.

Remarque. Le calcul démontre en fait que gd est bijective de $\mathbb{R}$ dans I (il suffit de dire avant que gd est à valeurs dans I par stricte croissance et calcul des limites).

6. On remarque que, pour $\theta \in I$, $\cos \theta$ est non nul et que $\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} > 0$. Par composition et opérations élémentaires, gd^{-1} est dérivable sur I . Pour le calcul de la dérivée, on écrit plutôt

$$\forall \theta \in I, \operatorname{gd}^{-1}(\theta) = \ln(1 + \sin \theta) - \ln(\cos \theta).$$

Alors, pour $\theta \in I$,

$$(\operatorname{gd}^{-1})'(\theta) = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \sin \theta}{\cos \theta + \cos \theta \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta}.$$

7. La fonction gd est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $\frac{1}{\operatorname{ch}}$ ne s'annule pas. D'après le cours, gd^{-1} est dérivable sur I et

$$\forall \theta \in I, (\operatorname{gd}^{-1})'(\theta) = \frac{1}{\operatorname{gd}'(\operatorname{gd}^{-1}(\theta))} = \operatorname{ch}(\operatorname{gd}^{-1}(\theta)).$$

Or, en appliquant la question 4 à $x = \operatorname{gd}^{-1}(\theta)$, on a :

$$\forall \theta \in I, \cos \theta = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{gd}^{-1}(\theta))}.$$

On obtient donc :

$$\forall \theta \in I, (\operatorname{gd}^{-1})'(\theta) = \frac{1}{\cos \theta}.$$

8. Soit y une fonction de $\mathbb{R}$ dans I . Notons $z = \operatorname{gd}^{-1} \circ y$. Comme gd et gd^{-1} sont dérivables, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ ssi z est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, dans ce cas, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = y'(x)(\operatorname{gd}^{-1})'(y(x)) = \frac{y'(x)}{\cos(y(x))}.$$

On en déduit que y est solution de l'équation différentielle ssi $z' = 1$, c'est-à-dire ssi z est de la forme $x \mapsto x - x_0$, avec x_0 une constante.

Ainsi, les y solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \operatorname{gd}(x - x_0)$, où $x_0 \in \mathbb{R}$ est une constante.

9. On remarque déjà qu'une fonction y constante à $y_0 \in \mathbb{R}$ est solution ssi $\cos(y_0)$ est nul ssi $y_0 \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$.

Considérons maintenant une fonction y à valeurs dans un intervalle $I_k =]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ et notons $z = (-1)^k(y - k\pi)$. Alors, z est à valeurs dans $I = I_0$, $z' = (-1)^k y'$ et $\cos(z) = \cos(y - k\pi) = (-1)^k \cos y$. On en déduit que y est une solution ssi z est une solution à l'équation de la question précédente. Ainsi, les fonctions y solutions à valeurs dans I_k sont les fonctions de la forme $x \mapsto (-1)^k \operatorname{gd}(x - x_0) + k\pi$, où x_0 est une constante.

On va montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Soit y une telle solution non constante. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle ne peut pas prendre uniquement des valeurs congrues à $\pi/2$ modulo π . Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y(x_0) \in I_k$. Quitte à considérer la fonction $x \mapsto (-1)^k y(x - x_0) - k\pi$, qui est encore solution, on se ramène au cas où $y(0) \in I =]-\pi/2, \pi/2[$. Finalement, on est ramené à montrer que si y est une solution de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $y(0) \in I$, alors y est à valeurs dans I .

On considère $J = \{u \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in [0, u], y(x) \in I\}$. On raisonne par l'absurde en supposant que J est majoré. Comme J est non vide, J a une borne supérieure b . Avec la définition de J , on montre aisément que $y([0, b])$ est à valeurs dans I . Le même raisonnement qu'à la question précédente montre alors que, sur $[0, b]$, y coïncide avec gd . Comme gd et y sont

continues, on obtient en passant à la limite quand $x \rightarrow b^-$ que $y(b) = \text{gd}(b)$. En particulier, $y(b) \in I$. Mais alors, par continuité de y , on peut trouver $\delta > 0$ tel que y est à valeurs dans I sur $[b, b + \delta]$. Alors, $b + \delta \in J$, ce qui contredit le fait que b majore J . Ceci montre que J est non majoré et donc, au vu de sa définition, que $J = \mathbb{R}_+$.

On a ainsi montré que y est à valeurs dans I sur $\mathbb{R}_+$; on montre de même qu'elle est à valeurs dans I sur $\mathbb{R}_-$.

Bilan. Les solutions sont

- Les fonctions constantes $y \mapsto y_0$, où $y_0 \equiv \pi/2 \text{ } [\pi]$.
- Les fonction de la forme $y : x \mapsto (-1)^k \text{gd}(x - x_0) + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Remarque. On remarque en particulier que pour tout couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$, ce qui signifie que y est déterminée par l'équation différentielle satisfaite et par une condition initiale. Le raisonnement un peu long pour montrer qu'une solution qui démarre dans I ne peut pas en sortir est assez typique dans la théorie des équations différentielles non linéaires.

Problème 3. Intégrales elliptiques et longueur de la lemniscate

A. Moyenne arithmético-géométrique

1. Par une récurrence immédiate, (u_n) et (v_n) sont bien définies et à valeurs strictement positives. Si $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ et donc $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2} = u_{n+1}.$$

En décalant l'indice, on a donc montré que pour tout $n \geq 1$, $v_n \leq u_n$.

2. Soit $n \geq 1$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$, donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

On a aussi $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} \geq 1$, donc $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

3. Pour tout $n \geq 1$, on a donc $v_n \leq v_{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

En particulier, si $n \geq 1$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq u_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$. Par récurrence immédiate, on en déduit que $\forall n \geq 1$, $0 \leq u_n - v_n \leq \frac{u_1 - v_1}{2^{n-1}}$; par théorème d'encadrement, $u_n - v_n \rightarrow 0$.

Ceci montre que les deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite.

B. Formule de Gauss

4. On a

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 \theta}} = \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \theta}} = \frac{1}{a} \mathcal{J} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right).$$

5. La question précédente appliquée à A et G (on a bien $A > G$) donne aussi :

$$I(A, G) = \frac{1}{A} \mathcal{J} \left(1 - \frac{G^2}{A^2} \right).$$

Avec les notations de l'énoncé et $k = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, on a $c = \sqrt{1 - k} = \frac{b}{a}$. Puis

$$q = \frac{1 - c}{1 + c} = \frac{a - b}{a + b}.$$

Or $1 - \frac{G^2}{A^2} = 1 - \frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b-2ab}{a+b} = \left(\frac{a-b}{a+b} \right) = q^2$. On a donc, par l'égalité admise,

$$I(A, G) = \frac{1}{A} \mathcal{J}(q^2) = \frac{1+c}{2A} \mathcal{J}(k) = \frac{a(1+c)}{2A} I(a, b).$$

Comme $\frac{a(1+c)}{2A} = 1$, on a bien $I(a, b) = I(A, G)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $b_n \leq a_n$ (par hypothèse pour $n = 0$, par les résultats de la partie précédente pour $n \geq 1$). Pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, on a

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + a_n^2 \sin^2 \theta}} \leq \frac{1}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} \leq \frac{1}{\sqrt{b_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{b_n}.$$

Par croissance de l'intégrale, on peut intégrer ces inégalités entre 0 et $\pi/2$ et obtenir :

$$\frac{\pi}{2a_n} \leq I(a_n, b_n) \leq \frac{\pi}{2b_n}.$$

7. Par la question 5 et une récurrence immédiate, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, I(a_n, b_n) = I(a, b).$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\pi}{2a_n} \leq I(a, b) \leq \frac{\pi}{2b_n}.$$

Or, par la partie précédente, les deux membres de gauche et de droite convergent vers $\frac{\pi}{2M(a, b)}$. Par passage à la limite dans les inégalités, on a donc :

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)}.$$

8. Soit $k \in]0, 1[$. La question 4 appliquée à $a = 1$ et $b = \sqrt{1 - k}$ donne

$$I(1, \sqrt{1 - k}) = \mathcal{J}(k).$$

Par la question précédente, on obtient donc :

$$\mathcal{J}(k) = \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1 - k})}.$$

C. Lemniscate de Bernoulli

9. Soit $\phi \in [0, \pi/2]$. Pour alléger les calculs, on note $c = \cos \phi$ et $s = \sin \phi$. On calcule :

$$x'(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-s\sqrt{1 + c^2} + c \frac{-2cs}{2\sqrt{1 + c^2}} \right) = \frac{-s(1 + 2c^2)}{\sqrt{2}(1 + c^2)}.$$

$$y'(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-s^2 + c^2) = \frac{2c^2 - 1}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= \frac{s^2(1 + 2c^2)^2 + (2c^2 - 1)^2(1 + c^2)}{2(1 + c^2)} \\ &= \frac{(1 - c^2)(1 + 4c^2 + 4c^4) + (4c^4 - 4c^2 + 1)(1 + c^2)}{2(1 + c^2)} \\ &= \frac{1}{1 + c^2}. \end{aligned}$$

10. On a donc :

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \phi}} d\phi = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2 - \sin^2 \phi}} d\phi = \frac{4}{\sqrt{2}} \mathcal{J} \left(\frac{1}{2} \right).$$

Par la question 8, on a finalement :

$$L = \frac{\pi\sqrt{2}}{M(1, \frac{1}{\sqrt{2}})}.$$

Remarque. On peut également écrire $L = \frac{2\pi}{M(\sqrt{2}, 1)}$; il est en effet immédiat que $M(ka, kb) = kM(a, b)$.

D. Transformation de Landen

A écrire...