

Semaine 5 - Applications, relations binaires

1 Applications

- Application (*synonyme : fonction*)
- Images, antécédents, image directe, image réciproque
- Restriction, prolongement, co-restriction d'une application
- Application identité, composition d'applications
- Injections, surjections, bijections
- Bijection réciproque
- Permutation, involution
- Fonctions indicatrices ; bijection canonique entre $\mathcal{P}(\Omega)$ et $\{0; 1\}^\Omega$
- Familles d'éléments, unions et intersections quelconques

2 Généralités sur les relations

- Relation binaire sur un ensemble E
- Propriétés de réflexivité, symétrie, anti-symétrie, transitivité

3 Relations d'équivalence

- Relation d'équivalence
- Classes d'équivalences, partitions d'un ensemble
- Les classes d'équivalence forment une partition d'un ensemble ; réciproquement, une partition donne lieu à une relation d'équivalence.
- Exemple détaillé de la congruence modulo $n \in \mathbb{N}$
- Ensemble quotient – HP, définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Exemple culturel : construction de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ comme ensemble quotient

4 Relations d'ordre

- Relation d'ordre (large)
- Application croissante
- Ordre total
- Élément minimal, élément maximal

- Plus petit élément, plus grand élément
- Minorant, majorant
- Borne inférieure, borne supérieure
- Exemples d'ordre, dont $\mathcal{P}(E)$ avec la relation d'inclusion et $\mathbb{N}$ avec la relation de divisibilité

5 Questions de cours

- Propriétés des images directe et réciproque
- Une composée d'injections est une injection ; si $g \circ f$ est injective, f est injective
- Une composée de surjections est une surjection ; si $g \circ f$ est surjective, g est surjective
- $f : E \rightarrow F$ est bijective ssi il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$
- Bijection entre $\mathcal{P}(\Omega)$ et $\{0, 1\}^\Omega$
- Définition des différentes propriétés d'une relation binaire
- Les classes d'équivalence forment une partition.
- Exemples de relations d'équivalence
- Définition des notions dans un ensemble ordonné
- Dans $\mathcal{P}(E)$, si $A, B \subset E$, $\sup\{A, B\} = A \cup B$