

DM 6 - Ensembles dénombrables

1 $\overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable

Un ensemble E est infini dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans E .

Un ensemble E est dénombrable s'il est fini ou infini dénombrable.

On suppose connu (cf. TD) le fait que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont infinis dénombrables.

1. Montrer que toute partie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
2. En déduire qu'une partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
4. Montrer que E est dénombrable ssi il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans E .
5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^k$ est infini dénombrable.
6. Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles dénombrables. Montrer que $E_1 \times \dots \times E_n$ est dénombrable.
7. Soient A un ensemble dénombrable et $(E_a)_{a \in A}$ une famille d'ensemble dénombrables.
Montrer que $E = \bigcup_{a \in A} E_a$ est dénombrable.

Un nombre complexe z est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients rationnels. On note $\overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques.

8. Montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable.

2 $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

On souhaite montrer que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable. On note

- $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $u : \mathbb{N}^* \rightarrow [0, 9]$ qui ne sont pas stationnaires en 9 :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : u_n \neq 9.$$

- f l'application de $\mathcal{S}$ dans $[0, 1[$ définie par : $\forall u \in \mathcal{S}, f(u) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{u_n}{10^n}$.

1. Montrer que f est bien définie.

Soient u et v deux suites distinctes dans $\mathcal{S}$. On note $k \in \mathbb{N}^*$ le plus petit indice tel que $u_k \neq v_k$. Par symétrie, on suppose $u_k < v_k$. On note $p \in \mathbb{N}^*$ un indice tel que $p > k$ et $u_p \neq 9$.

2. Soit $N \geq p$. Montrer que $\sum_{n=1}^N \frac{v_n}{10^n} - \sum_{n=1}^N \frac{u_n}{10^n} \geq \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^N}$.

3. En déduire que f est injective.

On se donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une suite¹ u^k dans $\mathcal{S}$.

4. Construire une suite v dans $\mathcal{S}$ distincte de tous les u^k .

5. En déduire que $\mathcal{S}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.

Remarques.

- Il n'est pas difficile de montrer que f est une bijection de $\mathcal{S}$ dans $[0, 1[$.
- Avec un peu plus de travail, on montre que $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont en bijection.
- L'hypothèse du continu affirme que tout ensemble X tel que $\mathbb{N} \subset X \subset \mathbb{R}$ est infini dénombrable ou en bijection avec $\mathbb{R}$. En 1963, le mathématicien Paul Cohen a démontré que l'hypothèse du continu et l'axiome du choix sont indécidables : il est impossible de démontrer, à partir des axiomes de la théorie des ensembles, que ces assertions sont vraies ou fausses.

¹On fera attention à bien distinguer exposant et indice. Le n -ème terme de la suite u^k s'écrit u_n^k .