DS n° 2 – Mathématiques

Reprise

Problème 1. Irrationalité de e^r pour $r \in \mathbb{Q}^*$

1. RAS
2. Pas de difficulté pour cette IPP ; aucune raison d'envisager une récurrence ici.
3. IPP légèrement plus compliquée mais il n'y a pas non plus beaucoup de possibilités. Partir du membre de droite pour remonter à $J_n(x)$ est possible mais peu naturel. Là encore, aucune raison d'envisager une récurrence.
4. La récurrence doit absolument être écrite proprement. En particulier, il doit y avoir la mention de *récurrence double* et les cas $n = 0$ et $n = 1$ doivent être écrits.
5. L'encadrement s'obtient rapidement par croissance de l'intégrale. On verra plus tard comment bien justifier l'inégalité stricte à gauche. Comme la question est posée, on ne peut pas se contenter d'invoquer un théorème de croissance comparée pour la deuxième partie de la question : il faut refaire le calcul fait en TD.
6. RAS
7. Pas de problème en général pour obtenir la contradiction. Trop peu d'élèves sont suffisamment sensibles au domaine des variables : r est dans $\mathbb{N}^*$ mais on veut la conclusion pour tout rationnel, ce qui pose peu de difficultés, une fois qu'on y a fait attention.

Problème 2. Fonction de Gudermann

A. Propriétés générales

1. Pour l'imparité, le mieux est de faire un changement de variable et d'invoquer la parité de ch. Beaucoup d'arguments compliqués pour justifier de la dérivabilité de gd : pourtant, le théorème fondamental de l'analyse dit exactement que gd est la primitive de $\frac{1}{\mathrm{ch}}$ qui s'annule en 0. Aucune raison d'appliquer la formule donnée en cours sur la dérivée d'une fonction donnée comme une intégrale avec des bornes variables.

2. On peut calculer directement l'intégrale (fait en TD) ou bien dériver la fonction donnée dans l'énoncé et constater qu'elle s'annule en 0.

3. Quelques élèves se trompent sur les limites et ne semblent pas perturbés d'obtenir une contradiction avec l'imparité de gd.

4. Trop de calculs compliqués. On doit reconnaître immédiatement une égalité du type $\cos(\alpha - \pi/2) = \sin(\alpha)$.

B. Étude de la bijection réciproque

5. La justification de la bijectivité est souvent mal faite. Doivent figurer clairement la continuité, la stricte croissance et les limites en $\pm\infty$. Ensuite, le TVI (généralisé) suffit. Pour le calcul de la bijection réciproque, il est beaucoup plus simple de résoudre directement l'équation $\mathrm{gd}(x) = \theta$; plutôt que de montrer que la formule donnée dans l'énoncé donne bien un antécédent de θ par gd.
6. On attendait ici un simple calcul de dérivée. Il n'est pas normal qu'autant d'élèves se trompent dans ces calculs élémentaires ; ou bien laissent une expression non simplifiée.
7. On attendait ici d'utiliser le résultat sur la dérivée de la bijection réciproque. Il faut déjà justifier que gd^{-1} est dérivable sur I. Le calcul est immédiat si on utilise la question 4. Certains élèves ne semblent pas gênés de trouver des résultats différents (ou pas manifestement égaux) dans cette question et la précédente.
8. Beaucoup constatent que gd est une solution. Certains commencent sans le dire ce qui ressemble à une *Analyse* et montrent que si y est solution, alors y est de la forme $x \mapsto \mathrm{gd}(x + C)$, pour une constante C. Il est dommage de ne pas faire la *Synthèse*, qui ne pose évidemment aucune difficulté. *On peut aussi bien sûr raisonner par équivalences, comme dans le corrigé.*
9. Question vraiment délicate, quasiment pas traitée. La difficulté consiste à montrer qu'une solution y non constante est nécessairement à valeurs dans un intervalle du type $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$.

Problème 3. Intégrales elliptiques et longueur de la lemniscate

A. Moyenne arithmético-géométrique

1. La stricte positivité des suites s'obtient par récurrence immédiate et est implicite dans le sujet (pour définir v_{n+1}). On applique juste l'inégalité arithmético-géométrique ; aucune récurrence.
2. RAS
3. Le sujet suggérait de démontrer d'abord que $u_n - v_n$ converge vers 0, pour appliquer ensuite le théorème des suites adjacentes. Beaucoup ont cependant directement démontré que (u_n) et (v_n) convergent et ont ensuite montré que leur limite était la même ; en passant à la limite dans une relation de récurrence.

B. Formule de Gauss

4. Calcul sans histoire, en général bien mené.
5. Il s'agit surtout de ne pas se perdre dans les notations. Il est à peu près clair qu'on va utiliser la propriété admise et la question précédente ; revenir à une expression des intégrales dénote un manque d'analyse du sujet.
6. Les inégalités à θ fixé ne posent pas de problème ; on intègre ensuite entre 0 et $\pi/2$. Il est de bon goût d'écrire *Par croissance de l'intégrale.*
7. Bien traitée en général. Il faut bien découper le raisonnement : $I(a_{n+1} = b_{n+1}) = I(a_n, b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la question 5, et donc, par récurrence immédiate, $I(a_n, b_n) = I(a, b)$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, on applique les résultats de la partie A.

8. Il s'agit essentiellement d'aller à l'envers par rapport à la question 4 ; il y a pusieurs possibilités car $I(a,b)$ est essentiellement une version homogénéisée de $\mathcal{J}(k)$ et il faut donc fixer une des deux valeurs a ou b.

C. Lemniscate de Bernoulli

9. Calcul franchement pénible mais sans difficultés. On gagne à introduire des notations comme $c = \cos\phi$ et $s = \sin\phi$ pour alléger et ne pas faire d'erreur en recopiant ; de plus, il faut absolument simplifier au maximum les expressions de x' et y' avant de calculer la somme de leur carré.
   Plus généralement, on économise significativement en lignes de calculs (et on évite les erreurs) en simplifiant au fur et à mesure plutôt que dans un long calcul final.
10. La transformation de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi$ en intégrale elliptique ne pose pas problème. Ensuite, on applique la question 8.

D. Transformation de Landen

Cette dernière partie consiste essentiellement en plusieurs changements de variable inspirés à la chaine.
Les élèves qui se sont lancés dans cette partie auraient eu intérêt à mieux écrire leurs calculs, quitte à en faire moins. Quand tous les résultats sont donnés dans l'énoncé, le correcteur ne doit avoir aucun doute sur le fait que les calculs ont été bien menés.

11. RAS
12. RAS
13. Le changement de variable $v = qt^2$ (ou écrit à l'endroit : $t = \dfrac{\sqrt{v}}{q}$) se trouve en considérant la dernière parenthèse.
14. RAS
15. On attendait un argument précis pour justifier qu'on peut faire tendre les bornes de l'intégrale vers 0. Le plus simple est de considérer de part et d'autre une primitive des fonctions intégrées et d'utilise le théorème fondamental de l'analyse.
    Il est à noter que l'utilisation du ε est faite pour que les intégrales intermédiaires soient bien définies. Avec le programme de 2ème année, on peut se passer de ε, mais on a toujours besoin de tous ces changements de variables.