DS n° 2 – Mathématiques

Corrigé

Problème 1. Irrationalité de e^r pour $r \in \mathbb{Q}^*$

1. On a $I_0(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} e^t dt = e^x - e^{-x}$. Pour $J_0(x)$, on fait une intégration par parties :

$$J_0(x) = \int_{-x}^{x} te^t dt = xe^x - (-xe^{-x}) - \int_{-x}^{x} e^t dt = (x-1)e^x + (x+1)e^{-x}.$$

2. On intègre par parties dans $I_n(x)$ en dérivant $t \mapsto (x^2-t^2)^n$ et en intégrant $t \mapsto e^t$. On a donc :

$$n!I_n(x) = (x^2-x^2)^n e^x - (x^2-(-x)^2)^n e^{-x} + \int_{-x}^{x} 2nt(x^2-t^2)^{n-1}e^t dt = 2n(n-1)!J_{n-1}(x).$$

D'où $I_n(x) = 2J_{n-1}(x)$.

3. On fait une intégration par parties dans $J_n(x)$ en dérivant $f : t \mapsto t(x^2-t^2)^n$ et en intégrant $t \mapsto e^t$. On a $f'(t) = (x^2-t^2)^n - 2nt^2(x^2-t^2)^{n-1}$. Donc,

$$n!J_n(x) = x(x^2-x^2)^n e^x - (-x)(x^2-(-x)^2)^n e^{-x} - \int_{-x}^{x} (x^2-t^2)^n e^t dt + 2n\int_{-x}^{x} t^2(x^2-t^2)^{n-1}e^t dt.$$

Dans l'intégrale de droite, on écrit $t^2 = -(x^2-t^2) + x^2$. Ainsi,

$$n!J_n(x) = -n!I_n(x) - 2n \times n!I_n(x) + 2nx^2(n-1)!I_{n-1}(x).$$

Après simplification par $n!$, on a bien $J_n(x) = -(2n+1)I_n(x) + 2x^2 I_{n-1}(x)$.

4. On le montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, cela résulte de la question 2 : on peut poser $A_0 = 1$ et $B_0 = -1$. Pour $n = 1$, on a $I_1(x) = 2J_0(x)$; donc $A_1 = 2(X-1)$ et $B_1 = 2(X+1)$ conviennent.
- Soit $n \geq 2$. On suppose le résultat établi aux rangs $n-1$ et $n-2$. Pour tout $x > 0$, on a

$$I_n(x) = 2J_{n-1}(x) = -2(2n-1)I_{n-1}(x) + 4x^2 I_{n-2}(x).$$

Avec les notations de l'énoncé, on peut donc écrire :

$$I_n(x) = -2(2n-1)\Big(A_{n-1}(x)e^x + B_{n-1}(x)e^{-x}\Big) + 4x^2\Big(A_{n-2}(x)e^x + B_{n-2}(x)e^{-x}\Big).$$

En posant $A_n = 4X^2 A_{n-2} - 2(2n-1)A_{n-1}$ et $B_n = 4X^2 B_{n-2} - 2(2n-1)B_{n-1}$, on a l'expression souhaitée. De plus, A_n et B_n sont à coefficients entiers car A_{n-1}, A_{n-2}, B_{n-1} et B_{n-2} le sont et les degrés de A_n et B_n sont au maximum ceux de $n-2$ plus 2, c'est-à-dire n.

5. $I_n(x)$ est l'intégrale sur le segment $[-x, x]$ non trivial d'une fonction strictement positive, donc $I_n(x) > 0$. De plus, pour $t \in [-x, x], (x^2 - t^2) \leq x^2$. Donc, $(x^2 - t^2)^n e^t \leq x^{2n} e^t$. Par propriété de croissance de l'intégrale, on en déduit que $I_n(x) \leq \dfrac{x^{2n}}{n!} \displaystyle\int_{-x}^{x} e^t dt$.

   Par théorème d'encadrement, on veut alors montrer que pour un x fixé, $\lim\limits_n \dfrac{x^{2n}}{n!} = 0$. Or, $\dfrac{x^{2n}}{n!} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{x^2}{k}$. Si k est plus grand qu'un certain indice $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{x^2}{k} \leq \dfrac{1}{2}$. Alors, si $n \geq n_0$, $\dfrac{x^{2n}}{n!} \leq \displaystyle\prod_{k=1}^{n_0 - 1} \frac{x^2}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n - n_0}$. On a majoré $\dfrac{x^{2n}}{n!}$ par une suite tendant vers 0, donc cette suite tend aussi vers 0, donc $\big(I_n(x)\big)$ aussi.

6. D'après la question 5., $I_n(r) = A_n(r)e^r + B_n(r)e^{-r}$, où A_n et B_n sont des polynômes à coefficients entiers de degré $\leq n$. Comme $e^r = \dfrac{p}{q}$, on en déduit :

$$pqI_n(r) = A_n(r)p^2 + B_n(r)q^2.$$

   Comme A_n et B_n sont à coefficients entiers et que r est un entier, le membre de droite est un entier. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $pqI_n(r) \in \mathbb{Z}$.

7. Par ailleurs, d'après la question 5., $I_n(r)$ est strictement positif et tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc $pqI_n(r)$ aussi. On a donc une suite d'entiers strictement positifs tendant vers 0, ce qui est absurde.

   On en déduit que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $e^r \notin \mathbb{Q}$. Considérons maintenant $\dfrac{p}{q}$ un rationnel strictement positif ; si on avait $e^{\frac{p}{q}}$ rationnel, alors $e^p = \left(e^{\frac{p}{q}}\right)^q$, serait aussi rationnel, ce qui n'est pas. Donc, e^r est irrationnel pour tout rationnel $r > 0$. Enfin, si $r < 0$ est un rationnel, on a $e^{-r} = \dfrac{1}{e^r}$, de sorte que e^{-r} est aussi irrationnel. Ceci conclut.

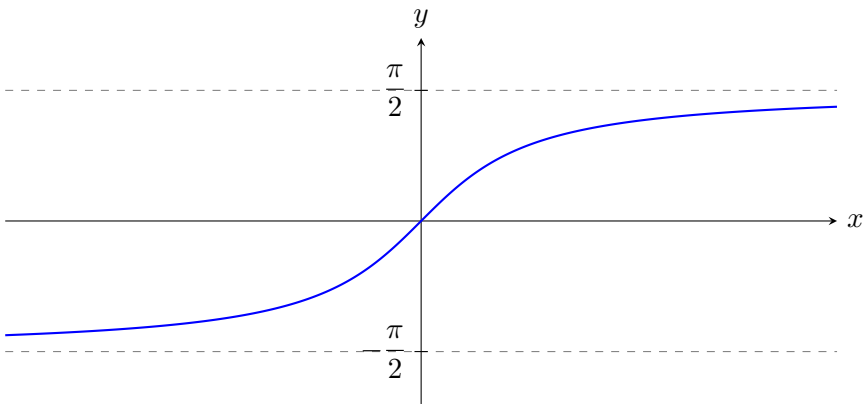
Problème 2. Fonction de Gudermann

A. Propriétés générales

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\operatorname{gd}(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = -\int_0^{x} \frac{du}{\operatorname{ch} u} = -\operatorname{gd}(x)$$
par changement de variable $u = -t$ et parité de ch. Donc, ch est impaire.
Par le théorème fondamental de l'analyse, gd est l'unique primitive de $\dfrac{1}{\operatorname{ch}}$ qui s'annule en 0 ; en particulier, gd est dérivable de dérivée $\dfrac{1}{\operatorname{ch}}$. Comme $\operatorname{ch} > 0$ sur $\mathbb{R}$, gd est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\operatorname{gd}(x) = \int_0^{x} \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt.$$
On pose $u = e^t$, de sorte que $du = e^t dt = u dt$. Alors,
$$\operatorname{gd}(x) = 2\int_1^{e^x} \frac{u^2+1}{d} u = 2\big(\arctan(e^x) - \arctan(1)\big) = 2(\arctan(e^x)) - \pi/2.$$

3. Par opération élémentaires sur les limites, $\operatorname{gd}(x) \to 2 \times \dfrac{\pi}{2} - \pi/2 = \pi/2$, quand $x \to +\infty$. Comme gd est impaire, on a aussi $\operatorname{gd}(x) \to -\pi/2$ quand $x \to -\infty$.



Cette courbe ressemble beaucoup à celle de arctan, y compris pour la tangente en 0, qui est la droite d'équation $y = x$ dans les deux cas.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned}\cos\big(\operatorname{gd}(x)\big) &= \cos(2\arctan(e^x) - \pi/2) \\ &= \sin\big(2\arctan(e^x)\big) \\ &= 2\cos\big(\arctan(e^x)\big)\sin\big(\arctan(e^x)\big)\end{aligned}$$

Comme $\arctan(e^x) \in]0, \pi/2[$, les cos et sin dans l'expression précédente sont positifs. Donc,
$$\cos\big(\operatorname{gd}(x)\big) = 2\sqrt{\cos^2\big(\arctan(e^x)\big)\sin^2\big(\arctan(e^x)\big)}$$

Comme $\cos^2 = \dfrac{1}{1+\tan^2}$ et $\sin^2 = 1-\cos^2 = \dfrac{\tan^2}{1+\tan^2}$, il vient

$$\cos\big(\operatorname{gd}(x)\big) = 2\sqrt{\frac{1}{1+e^{2x}} \times \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}} = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} = \frac{2}{e^{-x}+e^x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

B. Étude de la bijection réciproque

5. On a montré que gd est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites $\pm\pi/2$ en $\pm\infty$. Comme elle est de plus continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans I.
Soit $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, soit $x \in \mathbb{R}$. On raisonne par équivalences.

$$\begin{aligned}
\operatorname{gd}(x) = \theta &\iff 2\arctan(e^x) - \pi/2 = \theta \\
&\iff \arctan(e^x) = \frac{\theta}{2} + \pi/4 \\
&\iff e^x = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \pi/4\right)
\end{aligned}$$

Pour cette dernière équivalence, on utilise que $\arctan(e^x)$ et $\dfrac{\theta}{2} + \pi/4$ sont tous les deux dans $]0, \pi/2[$ et que tan y est injective. On calcule :

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\operatorname{gd}(x) = \theta \iff x = \ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right).$$

Donc, $\forall \theta \in I, \operatorname{gd}^{-1}(\theta) = \ln\left(\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)$.

Remarque. *Le calcul démontre en fait que* gd *est bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* I *(il suffit de dire avant que* gd *est à valeurs dans* I *par stricte croissance et calcul des limites).*

6. On remarque que, pour $\theta \in I$, $\cos\theta$ est non nul et que $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} > 0$. Par composition et opérations élémentaires, gd^{-1} est dérivable sur I. Pour le calcul de la dérivée, on écrit plutôt

$$\forall \theta \in I, \operatorname{gd}^{-1}(\theta) = \ln(1+\sin\theta) - \ln(\cos\theta).$$

Alors, pour $\theta \in I$,

$$(\mathrm{gd}^{-1})'(\theta) = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \cos\theta\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta}.$$

7. La fonction gd est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$ ne s'annule pas. D'après le cours, gd^{-1} est dérivable sur I et

$$\forall \theta \in I, (\mathrm{gd}^{-1})'(\theta) = \frac{1}{\mathrm{gd}'(\mathrm{gd}^{-1}(\theta))} = \mathrm{ch}(\mathrm{gd}^{-1}(\theta)).$$

Or, en appliquant la question 4 à $x = \mathrm{gd}^{-1}(\theta)$, on a :

$$\forall \theta \in I, \cos\theta = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{gd}^{-1}(\theta))}.$$

On obtient donc :

$$\forall \theta \in I, (\mathrm{gd}^{-1})'(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}.$$

8. Soit y une fonction de $\mathbb{R}$ dans I. Notons $z = \mathrm{gd}^{-1} \circ y$. Comme gd et gd^{-1} sont dérivables, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ ssi z est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, dans ce cas, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = y'(x)(\mathrm{gd}^{-1})'(y(x)) = \frac{y'(x)}{\cos(y(x))}.$$

On en déduit que y est solution de l'équation différentielle ssi $z' = 1$, c'est-à-dire ssi z est de la forme $x \mapsto x - x_0$, avec x_0 une constante.
Ainsi, les y solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{gd}(x - x_0)$, où $x_0 \in \mathbb{R}$ est une constante.

9. On remarque déjà qu'une fonction y constante à $y_0 \in \mathbb{R}$ est solution ssi $\cos(y_0)$ est nul ssi $y_0 \equiv \pi/2\,[\pi]$.
Considérons maintenant une fonction y à valeurs dans un intervalle $I_k =]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$ et notons $z = (-1)^k(y - k\pi)$. Alors, z est à valeurs dans $I = I_0$, $z' = (-1)^k y'$ et $\cos(z) = \cos(y - k\pi) = (-1)^k \cos y$. On en déduit que y est une solution ssi z est une solution à l'équation de la question précédente. Ainsi, les fonctions y solutions à valeurs dans I_k sont les fonctions de la forme $x \mapsto (-1)^k \mathrm{gd}(x - x_0) + k\pi$, où x_0 est une constante.

On va montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Soit y une telle solution non constante. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle ne peut pas prendre uniquement des valeurs congrues à $\pi/2$ modulo π. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y(x_0) \in I_k$. Quitte à considérer la fonction $x \mapsto (-1)^k y(x - x_0) - k\pi$, qui est encore solution, on se ramène au cas où $y(0) \in I =]-\pi/2, \pi/2[$. Finalement, on est ramené à montrer que si y est une solution de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $y(0) \in I$, alors y est à valeurs dans I.
On considère $J = \{u \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in [0, u], y(x) \in I\}$. On raisonne par l'absurde en supposant que J est majoré. Comme J est non vide, J a une borne supérieure b. Avec la définition de J, on montre aisément que $y\big([0, b[\big)$ est à valeurs dans I. Le même raisonnement qu'à la question précédente montre alors que, sur $[0, b[$, y coïncide avec gd. Comme gd et y sont

continues, on obtient en passant à la limite quand $x \to b^-$ que $y(b) = \mathrm{gd}(b)$. En particulier, $y(b) \in I$. Mais alors, par continuité de y, on peut trouver $\delta > 0$ tel que y est à valeurs dans I sur $[b, b+\delta]$. Alors, $b + \delta \in J$, ce qui contredit le fait que b majore J. Ceci montre que J est non majoré et donc, au vu de sa définition, que $J = \mathbb{R}_+$.
On a ainsi montré que y est à valeurs dans I sur $\mathbb{R}_+$; on montre de même qu'elle est à valeurs dans I sur $\mathbb{R}_-$.

Bilan. Les solutions sont

- Les fonctions constantes $y \mapsto y_0$, où $y_0 \equiv \pi/2\,[\pi]$.
- Les fonction de la forme $y : x \mapsto (-1)^k \,\mathrm{gd}(x - x_0) + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Remarque. *On remarque en particulier que pour tout couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$, ce qui signifie que y est déterminée par l'équation différentielle satisfaite et par une condition initiale. Le raisonnement un peu long pour montrer qu'une solution qui démarre dans I ne peut pas en sortir est assez typique dans la théorie des équations différentielles non linéaires.*

Problème 3. Intégrales elliptiques et longueur de la lemniscate

A. Moyenne arithmético-géométrique

1. Par une récurrence immédiate, (u_n) et (v_n) sont bien définies et à valeurs strictement positives. Si $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ et donc $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2} = u_{n+1}.$$
   En décalant l'indice, on a donc montré que pour tout $n \geq 1$, $v_n \leq u_n$.
2. Soit $n \geq 1$. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} \leq 0$, donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   On a aussi $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}} \geq 1$, donc $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
3. Pour tout $n \geq 1$, on a donc $v_n \leq v_{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   En particulier, si $n \geq 1$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq u_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2}$. Par récurrence immédiate, on en déduit que $\forall n \geq 1, 0 \leq u_n - v_n \leq \dfrac{u_1 - v_1}{2^{n-1}}$; par théorème d'encadrement, $u_n - v_n \to 0$.

   Ceci montre que les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite.

B. Formule de Gauss

4. On a
   $$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2\theta}} = \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\theta}} = \frac{1}{a}\mathcal{J}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right).$$

5. La question précédente appliquée à A et G (on a bien $A > G$) donne aussi :
   $$I(A,G) = \frac{1}{A}\mathcal{J}\left(1 - \frac{G^2}{A^2}\right).$$
   Avec les notations de l'énoncé et $k = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$, on a $c = \sqrt{1-k} = \dfrac{b}{a}$. Puis
   $$q = \frac{1-c}{1+c} = \frac{a-b}{a+b}.$$
   Or $1 - \dfrac{G^2}{A^2} = 1 - \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{a+b-2ab}{a+b} = \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right) = q^2$. On a donc, par l'égalité admise,
   $$I(A,G) = \frac{1}{A}\mathcal{J}(q^2) = \frac{1+c}{2A}\mathcal{J}(k) = \frac{a(1+c)}{2A}I(a,b).$$
   Comme $\dfrac{a(1+c)}{2A} = 1$, on a bien $I(a,b) = I(A,G)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $b_n \leq a_n$ (par hypothèse pour $n = 0$, par les résultats de la partie précédente pour $n \geq 1$). Pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, on a

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\theta + a_n^2 \sin^2\theta}} \leq \frac{1}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\theta + b_n^2 \sin^2\theta}} \leq \frac{1}{\sqrt{b_n^2 \cos^2\theta + b_n^2 \sin^2\theta}} = \frac{1}{b_n}.$$

Par croissance de l'intégrale, on peut intégrer ces inégalités entre 0 et $\pi/2$ et obtenir :

$$\frac{\pi}{2a_n} \leq I(a_n, b_n) \leq \frac{\pi}{2b_n}.$$

7. Par la question 5 et une récurrence immédiate, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, I(a_n, b_n) = I(a, b).$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\pi}{2a_n} \leq I(a, b) \leq \frac{\pi}{2b_n}.$$

Or, par la partie précédente, les deux membres de gauche et de droite convergent vers $\dfrac{\pi}{2M(a,b)}$. Par passage à la limite dans les inégalités, on a donc :

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)}.$$

8. Soit $k \in]0, 1[$. La question 4 appliquée à $a = 1$ et $b = \sqrt{1-k}$ donne

$$I(1, \sqrt{1-k}) = \mathcal{J}(k).$$

Par la question précédente, on obtient donc :

$$\mathcal{J}(k) = \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1-k})}.$$

C. Lemniscate de Bernoulli

9. Soit $\phi \in [0, \pi/2]$. Pour alléger les calculs, on note $c = \cos\phi$ et $s = \sin\phi$. On calcule :

$$x'(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-s\sqrt{1+c^2} + c\frac{-2cs}{2\sqrt{1+c^2}}\right) = \frac{-s(1+2c^2)}{\sqrt{2(1+c^2)}}.$$

$$y'(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-s^2 + c^2\right) = \frac{2c^2 - 1}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= \frac{s^2(1+2c^2)^2 + (2c^2-1)^2(1+c^2)}{2(1+c^2)} \\ &= \frac{(1-c^2)(1+4c^2+4c^4) + (4c^4 - 4c^2 + 1)(1+c^2)}{2(1+c^2)} \\ &= \frac{1}{1+c^2}. \end{aligned}$$

10. On a donc :

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2-\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi = \frac{4}{\sqrt{2}}\mathcal{J}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Par la question 8, on a finalement :

$$L = \frac{\pi\sqrt{2}}{M(1,\frac{1}{\sqrt{2}})}.$$

Remarque. *On peut également écrire* $L = \dfrac{2\pi}{M(\sqrt{2},1)}$ *; il est en effet immédiat que* $M(ka,kb) = kM(a,b)$.

D. Transformation de Landen

11. On fait le changement de variable $u = f(\theta)$. On a donc $\mathrm{d}u = f'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{-2k\cos\theta\sin\theta}{2u}\,\mathrm{d}\theta$. On a $k\sin^2\theta = 1-u^2$ donc $\sin^2\theta = \dfrac{1-u^2}{k}$ et $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = \dfrac{u^2+k-1}{k}$. Comme θ est dans $]0,\pi/2[$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont positifs. On a donc :

$$\mathrm{d}u = -\frac{\sqrt{(1-u^2)(u^2+k-1)}}{u}\,\mathrm{d}\theta.$$

Comme $c^2 = 1-k$, on a finalement :

$$\mathcal{J}_\varepsilon(k) = \int_{f(\pi/2-\varepsilon)}^{f(\varepsilon)} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(u^2-c^2)}}.$$

12. On fait le changement de variable $v = g(u)$. On a donc $\mathrm{d}v = g'(u)\,\mathrm{d}u = -\dfrac{2}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u$ car $g(u) = -1+\dfrac{2}{1+u}$. Par la même formule, on a $1+u = \dfrac{2}{1+v}$ et donc $\mathrm{d}v = -\dfrac{(1+v)^2}{2}\,\mathrm{d}u$. Comme $u = \dfrac{2}{1+v} - 1 = \dfrac{1-v}{1+v}$, on a

$$1-u^2 = 1-\frac{(1-v)^2}{(1+v)^2} = \frac{4v}{(1+v)^2} \text{ et } u^2-c^2 = \frac{(1-v)^2}{(1+v)^2} - c^2 = \frac{(1-v)^2 - c^2(1+v)^2}{(1+v)^2}.$$

On remplace dans l'intégrale :

$$\mathcal{J}_\varepsilon(k) = -2\int_{g\circ f(\pi/2-\varepsilon)}^{g\circ f(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{4v\big((1-v)^2 - c^2(1+v)^2\big)}}.$$

On s'intéresse maintenant à l'expression $(1-v)^2 - c^2(1+v)^2$. On factorise en

$$\big((1-v)-c(1+v)\big)\big((1-v)+c(1+v)\big) = \big(v(-c-1)-c+1\big)\big(v(c-1)+c+1\big).$$

Avec $q = \dfrac{1-c}{1+c}$, ceci vaut donc :

$$\big(-v(c+1)+q(c+1)\big)\big(-qv(c+1)+c+1\big) = (1+c)^2(q-v)(1-qv).$$

Finalement, on a bien

$$\mathcal{J}_\varepsilon(k) = \frac{1}{1+c}\int_{g\circ f(\varepsilon)}^{g\circ f(\pi/2-\varepsilon)} \frac{dv}{\sqrt{v(q-v)(1-qv)}}.$$

13. On fait le changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{v}{q}}$, ce qui donne $v = qt^2$. On a donc $\mathrm{d}v = 2qt\,\mathrm{d}t$. Alors,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v(q-v)(1-qv)}} = \frac{2qt\,\mathrm{d}t}{\sqrt{qt^2(q-qt^2)(1-q^2t^2)}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-q^2t^2)}}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{J}_\varepsilon(k) = \frac{2}{1+c}\int_{\alpha_\varepsilon}^{\beta_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-q^2t^2)}},$$

où $\alpha_\varepsilon = h\circ g\circ f(\varepsilon)$ et $\beta_\varepsilon = h\circ g\circ f(\pi/2-\varepsilon)$, avec $h(v) = \sqrt{\dfrac{v}{q}}$.

Pour les limites, on procède par composition.
La limite en 0 de f est 1 ; la limite en 1 de g est 0 et la limite en 0 de h est 0 donc, $\alpha_\varepsilon \to 0$, quand $\varepsilon \to 0^+$.
La limite en $\pi/2$ de f est $\sqrt{1-k} = c$; la limite en c de g est q et la limite en q de h est 1. Donc, $\beta_\varepsilon \to 1$, quand $\varepsilon \to 0^+$.

14. Changement de variable $\phi = \arcsin t$. On a donc $t = \sin\phi$ et $\mathrm{d}t = \cos\phi\,\mathrm{d}\phi = \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}\phi$. On a immédiatement :

$$\mathcal{J}_\varepsilon(k) = \frac{2}{1+c}\int_{\arcsin\alpha_\varepsilon}^{\arcsin\beta_\varepsilon} \frac{d\phi}{\sqrt{1-q^2\sin^2\phi}}.$$

15. On a donc, pour tout $\varepsilon \in]0,\pi/4[$:

$$\int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k\sin^2\theta}} = \frac{2}{1+c}\int_{\arcsin\alpha_\varepsilon}^{\arcsin\beta_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-q^2\sin^2\theta}}.$$

On souhaite faire tendre cette égalité vers 0. Pour détailler ce qui se passe au niveau des intégrales, on note F_k et F_{q^2} des primitives sur $[0,\pi/2]$ des fonctions intégrées à gauche et à droite. On a donc, pour $\varepsilon \in]0,\pi/4[$:

$$F_k(\pi/2-\varepsilon) - F_k(\varepsilon) = \frac{2}{1+c}\big(F_{q^2}(\arcsin\beta_\varepsilon) - F_{q^2}(\arcsin\alpha_\varepsilon)\big).$$

Comme F_k et F_{q^2} sont des primitives de fonctions continues sur $[0,\pi/2]$, elles sont dérivables et en particulier continues. On a donc, par opérations élémentaires sur les limites :

$$F_k(\pi/2) - F_k(0) = \frac{2}{1+c}\big(F_{q^2}(\pi/2) - F_{q^2}(0)\big),$$

en utilisant à droite les limites de α_ε et β_ε, quand $\varepsilon \to 0^+$. Autrement dit,

$$\mathcal{J}(k) = \frac{2}{1+c}\mathcal{J}(q^2),$$

ce qui conclut les calculs.