DM 6 - Ensembles dénombrables

1 $\overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable

1. Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$ (les parties finies sont dénombrables par définition). Par récurrence forte, on construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A par :

   - $a_0 = \min(A)$.
   - Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_0, \dots, a_k$ ont été définis. On définit $a_{k+1} = \min\big(A - \{a_0, \dots, a_k\}\big)$.

   Cette suite est bien définie car toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A - \{a_0, \dots, a_k\}$ est non vide (car A est infinie). De plus, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante par construction.

   Notons $\psi : \mathbb{N} \to A, n \mapsto a_n$. Comme ψ est strictement croissante, elle est injective. Supposons par l'absurde que ψ n'est pas surjective. Alors, on peut considérer le plus petit entier $a \in A$, qui n'est pas dans l'image de ψ. En particulier, $a \neq a_0$. L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid a_k < a\}$ n'est pas vide (il contient 0) et il est fini (comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, seul un nombre fini de a_k peuvent être inférieurs à a). Il existe donc un unique indice $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k < a < a_{k+1}$. Alors $a < a_j$, pour tout $j \geq k+1$ et $a \leq b$, pour tout $b \in A - \mathrm{Im}(\psi)$ (par hypothèse). Donc $a = \min(A - \{a_0, \dots, a_k\})$; et donc $a = a_{k+1}$. C'est absurde.

   Donc ψ est surjective ; c'est donc une bijection. Donc, A est dénombrable.

2. Soit E un ensemble dénombrable, soit F une partie de E. Si E est fini, alors F aussi et donc F est dénombrable ; on suppose donc E infini dénombrable et F partie infinie de E. Notons $f : E \to \mathbb{N}$ une bijection. Alors $f(F)$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$ (l'image par une bijection d'un ensemble infini est un ensemble infini), donc $f(F)$ est infini dénombrable. Notons $\psi : f(F) \to \mathbb{N}$ une bijection.

   De plus, $f_{|F} : F \to f(F)$ est aussi une bijection. Donc $\psi \circ f_{|F} : F \to \mathbb{N}$ est une bijection et F est infini dénombrable.

3. Soit q un nombre rationnel. Il existe un unique couple $(a_q, b_q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q = \dfrac{a_q}{b_q}$ et tels que a_q et b_q sont premiers entre eux. L'application $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, q \mapsto (a_q, b_q)$ est une injection puisque le couple (a_q, b_q) détermine q. Ainsi $\mathbb{Q}$ est équipotent à $\iota(\mathbb{Q})$, partie infinie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

   Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est infini dénombrable. Notons $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ une bijection et $f_2 : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ une bijection (p. ex. $f_2(n) = n - 1$). Alors, on vérifie immédiatement que l'application $\tau : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^2, (n_1, n_2) \mapsto (f_1(n_1), f_2(n_2))$ est une bijection. Donc $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est équipotent à $\mathbb{N}^2$, donc est infini dénombrable. Donc $\iota(\mathbb{Q})$ est infini dénombrable. Donc $\mathbb{Q}$ aussi.

4. Soit E un ensemble dénombrable. S'il est fini, on note $a_0, \dots, a_{N-1}$ ses éléments et on considère par exemple l'application $f : \mathbb{N} \to E, k \mapsto a_{r(k)}$, où $r(k)$ est le reste de k dans la division

euclidienne par n. Alors, f est une surjection de $\mathbb{N}$ dans E. Si E est infini, il existe par définition une bijection de $\mathbb{N}$ dans E, en particulier une surjection de $\mathbb{N}$ dans E.

Réciproquement, soit $f : \mathbb{N} \to E$ une surjection. Pour tout élément x de E, on note $g(x)$ le plus petit antécédent de x par f (on prend le plus petit pour ne pas avoir de choix à faire). Notons $A = \{g(x), x \in E\}$; c'est une partie de $\mathbb{N}$, donc un ensemble dénombrable. On vérifie immédiatement que $f_{|A} : A \to E$ est une bijection ; comme A est dénombrable ; E aussi.

5. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{N}^n$ est dénombrable.

   - Le cas $n = 1$ est évident ; le cas $n = 2$ est supposé connu et on note f_2 une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$.
   - Soit $n \geq 2$ tel que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable. Il existe donc une surjection $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$. L'application $(f_n, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^{n+1}, (a, b) \mapsto (f_n(a), b)$ (on identifie $\mathbb{N}^{n+1}$ et $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$) est surjective. En composant avec une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$, on construit ainsi une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^{n+1}$. Donc $\mathbb{N}^{n+1}$ est dénombrable.

   Ceci conclut la récurrence.

6. Soient $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles dénombrables. Par hypothèse, il existe des surjections f_i de $\mathbb{N}$ dans E_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$. On les utilise pour construire une surjection $f : \mathbb{N}^n \to E_1 \times \cdots \times E_n$, définie par
   $$f(a_1, \ldots, a_n) = (f_1(a_1), \ldots, f_n(a_n)).$$
   En composant avec une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^n$, on construit ainsi une surjection de $\mathbb{N}$ dans $E_1 \times \cdots \times E_n$. Donc cet ensemble est dénombrable.

7. Pour tout a, notons f_a une surjection de $\mathbb{N}$ dans E_a. Notons g une surjection de $\mathbb{N}$ dans A et notons h une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$. On définit $\psi : \mathbb{N} \to E$ par
   $$\psi(n) = f_{g(h_1(n))}(h_2(n)),$$
   où on note $h(n) = (h_1(n), h_2(n)) \in \mathbb{N}^2$. Montrons que ψ est une surjection de $\mathbb{N}$ dans E.

   Soit $e \in E$. Alors il existe $a \in A$ tel que $e \in E_a$. Par surjectivité de g, on peut trouver $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $g(n_1) = a$. Par surjectivité de f_a, on peut trouver $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $f_a(n_2) = e$. On a donc $f_{g(n_1)}(n_2) = e$. Enfin, par surjectivité de h, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $h(n) = (n_1, n_2)$, ce qui revient à dire que $n_1 = h_1(n)$ et $n_2 = h_2(n)$. On a donc :
   $$\psi(n) = f_{g(h_1(n))}(h_2(n)) = f_{g(n_1)}(n_2) = f_a(n_2) = e.$$
   Ce qui montre la surjectivité de ψ, et donc la dénombrabilité de E.

8. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathscr{A}_d$ des polynômes à coefficients rationnels de degré inférieur à d est dénombrable. En effet, il est en bijection avec $\mathbb{Q}^{d+1}$ (en considérant les coefficients du polynôme), qui est dénombrable car $\mathbb{Q}$ l'est, et par la question précédente. Pour chaque $P \in \mathscr{A}_d$, on note R_P l'ensemble (fini) de ses racines. Alors $R_d = \bigcup_{P \in \mathscr{A}_d} R_P$ est dénombrable, comme union dénombrable d'ensembles dénombrables.

   L'ensemble $R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} R_d$ est lui aussi dénombrable (car $\mathbb{N}^*$ et tous les R_d le sont). C'est l'ensemble de toutes les racines de polynômes à coefficients rationnels, c'est-à-dire $\overline{\mathbb{Q}}$. Donc $\overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable.

2 $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

1. Soit $u \in \mathscr{S}$. Pour tout $N \geq 1$, on note $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{10^n}$. Comme pour tout $N \geq 1$, $S_{N+1} - S_N = \frac{u_{n+1}}{10^{n+1}} \geq 0$, $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus, comme pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 9$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^N}}{1-\frac{1}{10}} = 1 - 10^{-N} < 1$. Donc, (S_N) est une suite croissante et majorée par 1, donc elle converge. Ceci montre que $f(u)$ est bien défini, *a priori* dans $[0,1]$. On peut montrer (analogue à la question 2.) qu'on ne peut pas avoir $f(u) = 1$ (il faudrait que la suite u soit constante égale à 9, ce qui est exclu). On omet la vérification de ce point, non nécessaire pour la suite.

2. On coupe la somme en cinq.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{10^n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{v_n - u_n}{10^n} + \frac{v_k - u_k}{10^k} + \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{v_n - u_n}{10^n} + \frac{v_p - u_p}{10^p} + \sum_{n=p+1}^{N} \frac{v_n - u_n}{10^n}.$$

   - La première somme est nulle.
   - $\frac{v_k - u_k}{10^k} \geq \frac{1}{10^k}$.
   - Pour tout $n \in [\![k+1, p-1]\!]$, $v_n - u_n \geq -9$. Donc, $\sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{v_n - u_n}{10^n} \geq \frac{-9}{10^{k+1}} \frac{1-\frac{1}{10^{p-k-1}}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10^{p-1}} - \frac{1}{10^k}$.
   - $\frac{v_p - u_p}{10^p} \geq \frac{-8}{10^p}$.
   - De même que pour la somme précédente, $\sum_{n=p+1}^{N} \frac{v_n - u_n}{10^n} \geq \frac{1}{10^N} - \frac{1}{10^p}$.

   En sommant les inégalités, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{10^n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{10^n} \geq \frac{1}{10^{p-1}} + \frac{-8}{10^p} + \frac{1}{10^N} - \frac{1}{10^p} = \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^N}.$$

3. Ainsi, pour tout $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{10^n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{10^n} \geq \frac{1}{10^p}$. En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on en déduit que $f(v) - f(u) \geq \frac{1}{10^p}$. En particulier, $f(u) \neq f(v)$.
   Comme u et v sont deux suites distinctes de $\mathscr{S}$ quelconques, on a montré que f est injective.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note v_n un entier dans $[\![0,8]\!]$ distinct de u_n^n (par exemple, on peut prendre $v_n = 0$ si $u_n^n \neq 0$ et $v_n = 1$ si $u_n^n = 0$). Comme v_n ne vaut jamais 9, la suite (v_n) ne stationne pas en 9, donc $(v_n) \in \mathscr{S}$.
   De plus, si $k \in \mathbb{N}$, les suites v et u^k sont distinctes. En effet, v_k et u_k^k diffèrent, par construction.

5. La question précédente montre qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathscr{S}$. Donc, $\mathscr{S}$ n'est pas dénombrable. Comme il existe une injection de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ n'est pas non plus dénombrable (s'il l'était, l'ensemble $f(\mathscr{S})$ le serait aussi par la question 5 de l'exercice précédent ; comme cet ensemble est en bijection avec $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}$ lui-même serait dénombrable).