DM 7 - Théorèmes de Cantor-Bernstein et de Knaster-Tarski – Corrigé

1 Théorème de Cantor-Bernstein

1. Par définition, E_∞ est le complémentaire de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ dans E. On a donc bien $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} E_n$.

   Par définition, les éléments de E_0 n'ont pas de parent mais ceux de E_n $(n \geq 1)$ ou de E_∞ en ont un. Donc les intersections $E_0 \cap E_\infty$ et $E_0 \cap E_n$ $(n \geq 1)$ sont vides. Comme E_∞ est le complémentaire de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ dans E, les intersections $E_n \cap E_\infty$ $(n \geq 1)$ sont vides aussi.

   Il reste à vérifier que si $n, p \in \mathbb{N}^*$ sont distincts, alors $E_n \cap E_p = \emptyset$. On raisonne par l'absurde, en supposant l'existence d'un élément $x \in E_n \cap E_p$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $n < p$. Comme x a n ancêtres, on peut noter x_1 le parent de x, x_2 le parent de x_1... jusqu'à x_n le parent de x_{n-1}. Par une récurrence finie immédiate, on montre que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \in E_{n-k} \cap E_{p-k}$ si k est pair et $x_k \in F_{n-k} \cap F_{p-k}$ si k est impair. En particulier, $x_n \in E_0 \cap E_{n-p}$ ou $x_n \in F_0 \cap F_{n-p}$. Comme x_n appartient à E_0 ou à F_0, il n'a pas de parent. Comme il appartient à E_{n-p} ou F_{n-p}, avec $n - p \geq 1$, il en a un. C'est absurde. Donc $E_n \cap E_p = \emptyset$.

   Bilan : l'union $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} E_n$ est disjointe.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in E_n$. L'élément $f(x) \in F$ a pour parent x, qui a n ancêtres. Ainsi $f(x)$ a $n+1$ ancêtres. Donc $f(x) \in F_{n+1}$. Ceci montre que $f(E_n) \subset F_{n+1}$.

   Soit $y \in F_{n+1}$. Comme $n + 1 \geq 1$, y a un parent, qu'on note x, et x a n ancêtres. Donc $x \in E_n$ et $f(x) = y$. Ainsi, $F_{n+1} \subset f(E_n)$.

   Par double inclusion, on a montré que $f(E_n) = F_{n+1}$.

   Ainsi, f induit bien une application $f_{|E_n} : E_n \to F_{n+1}$ et cette application est surjective. Comme f est injective, $f_{|E_n}$ aussi et finalement $f_{|E_n} : E_n \to F_{n+1}$ est une bijection.

   On montre de même que $g(F_n) = E_{n+1}$ et que $g_{|F_n} : F_n \to E_{n+1}$ est une bijection.

3. Soit $x \in E_\infty$. L'élément $f(x)$ a pour parent x donc $f(x) \notin F_0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \notin E_{n-1}$ et donc $f(x) \notin F_n$. Ainsi, $f(x) \in F_\infty$. Ainsi $f(E_\infty) \subset F_\infty$.

   Soit $y \in F_\infty$. Par définition, y a un parent, qu'on note x. Si x appartenait à E_n, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, y appartiendrait à F_{n+1}, ce qui n'est pas. Donc $x \in E_\infty$ et on a montré que $F_\infty \subset f(E_\infty)$.

   Par double inclusion, on a montré que $f(E_\infty) = F_\infty$.

   On en déduit que $f_{|E_\infty} : E_\infty \to F_\infty$ est bien définie et que c'est une surjection. Comme f est une injection, $f_{|E_\infty} : E_\infty \to F_\infty$ est aussi une injection ; c'est donc une bijection.

4. Pour simplifier les notations, on note :

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = f_{|E_n} : E_n \to F_{n+1}$ et $g_n = g_{|F_n} : F_n \to E_{n+1}$.
   - $f_\infty = f_{|E_\infty} : E_\infty \to F_\infty$.

Toutes ces applications sont des bijections. On pose maintenant $\phi : E \to F$, définie par

$$\forall x \in E, \phi(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in E_n, \text{ avec } n \text{ pair} \\ \left(g_{n-1}\right)^{-1}(x) & \text{si } x \in E_n, \text{ avec } n \text{ impair} \\ f_\infty(x) & \text{si } x \in E_\infty. \end{cases}$$

Cette application est bien définie car $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} E_n$ et que l'union est disjointe.

Remarquons que si $x \in E_n$ avec n pair, $\phi(x) \in F_{n+1}$, si $x \in E_n$ avec n impair, $\phi(x) \in F_{n-1}$ et si $x \in E_\infty$, $f(x) \in F_\infty$.

On en déduit (en utilisant que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} F_n$ et que cette union est disjointe) que si $x, x' \in E$ sont tels que $\phi(x) = \phi(x')$, alors ou bien x, x' appartiennent à un même E_n ($n \in \mathbb{N}$), ou bien $x, x' \in E_\infty$. Mais comme f_n, $(g_n)^{-1}$ et f_∞ sont bijectives (donc injectives), nécessairement $x = x'$. Ainsi ϕ est injective.

Soit maintenant $y \in F$.

- Ou bien il existe un entier n pair tel que $y \in F_n$. Alors, notons $x = g_n(y) \in E_{n+1}$. On a $y = (g_n)^{-1}(x) = \phi(x)$ (car $n+1$ impair). Donc $y \in \mathrm{Im}(\phi)$.
- Ou bien il existe un entier n impair tel que $y \in F_n$. Alors, comme $f_{n-1} : E_{n-1} \to F_n$ est bijective, il existe $x \in E_{n-1}$ tel que $y = f_{n-1}(x) = \phi(x)$ (car $n-1$ est pair). Donc $y \in \mathrm{Im}(\phi)$.
- Ou bien $y \in F_\infty$. Alors, comme f_∞ est bijective, il existe $x \in E_\infty$ tel que $y = f_\infty(x) = \phi(x)$. Donc $y \in \mathrm{Im}(\phi)$.

Par disjonction de cas, on en déduit que ϕ est surjective.

Bilan : ϕ est bijective et donc E et F sont équipotents.

2 Théorème de Knaster-Tarski

1. Si T est totalement ordonné et si $a, b \in T$, alors ou bien $a \geq b$, ou bien $b \geq a$. Dans le premier cas, $\sup\{a,b\} = a$ et $\inf\{a,b\} = b$; dans le deuxième cas, c'est le contraire.

2. Si X, Y sont deux parties de E, alors $Z \in \mathscr{P}(E)$ majore $\{X,Y\}$ ssi $X \subset Z$ et $Y \subset Z$ ssi $X \cup Y \subset Z$. On en déduit que $X \cup Y$ est le plus petit des majorants de $\{X,Y\}$; donc $X \cup Y = \sup\{X,Y\}$. De même, $X \cap Y = \inf\{X,Y\}$.

3. On a vu en cours que pour cette relation d'ordre, la borne supérieure de deux entiers est leur ppcm, la borne inférieure leur pgcd.

4. Soit X un ensemble ordonné complet. Soit A une partie non vide de X. On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des minorants de A ; cet ensemble est non vide car X admet un plus petit élément m et que $m \in \mathscr{M}$. On note $M = \sup(\mathscr{M})$, qui est bien défini par hypothèse.
   Par définition de $\mathscr{M}$, on a $\forall y \in \mathscr{M}, \forall a \in A, y \leq a$. En particulier, les éléments de A sont des majorants de $\mathscr{M}$. Par définition d'un sup, on a donc $M \leq a$, pour tout $a \in A$. Ainsi, M est aussi un minorant de A ; donc $M \in \mathscr{M}$. Donc, M est le plus grand élément de $\mathscr{M}$, c'est-à-dire la borne inférieure de A.
   Par ailleurs, si A est vide, A admet aussi une borne inférieure : conventionnellement, il s'agit du plus grand élément de X (qui existe, car c'est le sup de X, vu comme partie de lui-même).

5. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de parties de E, on montre – comme pour le cas de deux ensembles – que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est la borne supérieure de la partie $\{A_i, i \in I\}$, dans l'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(E), \subset)$.

6. (a) Soit $x \in A$. Comme M majore A, on a $x \leq M$. Par croissance de f, $f(x) \leq f(M)$. Comme $x \leq f(x)$, on a par transitivité, $x \leq f(M)$. Ainsi, $f(M)$ est un majorant de A ; comme M est le plus petit des majorants de A, on a $M \leq f(M)$.

   (b) Comme $M \leq f(M)$, on a aussi par croissance $f(M) \leq f\big(f(M)\big)$. Par définition de A, $f(M) \in A$. Comme M est un majorant de A, on a donc $f(M) \leq M$. Par antisymétrie de la relation d'ordre, $M = f(M)$. Donc, M est un point fixe de f.

7. **Une première application.**

   (a) Soit A une partie non vide de $[a,b]$ (le cas où A est vide est immédiat). Par la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, A – vue comme partie de $\mathbb{R}$ – admet une borne supérieure M dans $\mathbb{R}$ (car A est majoré par b). Comme A contient un élément supérieur à a, on a $M \geq a$. De plus, si on avait $M > b$, alors b serait un majorant de A, strictement plus petit que M, ce qui est absurde. Donc, $M \in [a,b]$. On se convainc que cela revient à dire que M est la borne supérieure de A – vue comme partie de $[a,b]$. Donc, toute partie de $[a,b]$ admet une borne supérieure ; de même borne inférieure. Donc, $[a,b]$ est un treillis complet.
   Remarque. Ne pas se contenter de dire que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure et que $[a,b]$ est une partie de $\mathbb{R}$; sinon, on ne comprend pas ce qu'il se passe pour l'intervalle ouvert $]0,1[$ à la question c).

   (b) On applique le théorème de Knaster-Tarski.

(c) Non. La fonction $x \mapsto x^2$ est un contre-exemple pour $]0,1[$ et la fonction $x \mapsto x+1$ est un contre-exemple pour $\mathbb{R}$.
Le problème vient du fait que ni $]0,1[$ ni $\mathbb{R}$ ne sont des treillis complets. Le premier est borné mais ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure : $]0,1[$ n'admet pas de borne supérieure, quand on le voit comme une partie de lui-même (*à méditer*) ; pour $\mathbb{R}$, c'est encore plus simplet puisque ce n'est pas un ensemble borné.

8. **Une autre preuve du théorème de Cantor-Bernstein.**

(a) Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. On a $f(A) \subset f(B)$. Donc, $F \setminus f(B) \subset F \setminus f(A)$. Donc, $g\big(F \setminus f(B)\big) \subset g\big(F \setminus f(A)\big)$. Et donc finalement $G(A) = E \setminus g\big(F \setminus f(A)\big) \subset E \setminus g\big(F \setminus f(B)\big) = G(B)$. Donc, G est une application croissante.

(b) On applique le théorème de Knaster-Tarski ; on a montré précédemment que $\mathscr{P}(E)$ est un treillis complet.

(c) Traduisons déjà le fait que M est un point fixe de G. On a $M = E \setminus g\big(F \setminus f(M)\big)$. Cela signifie qu'un élément $x \in E$ vérifie $x \notin M \iff \exists y \in F \setminus f(M) : x = g(y)$. Par injectivité de g, ce y doit être unique ; avec les notations de l'énoncé, on peut même écrire : $x \notin M \iff g^{-1}(x) \notin f(M)$.
Et on a donc aussi $x \in M \iff g^{-1}(x) \in f(M)$.
Considérons maintenant un $y \in F$ et cherchons à résoudre $h(x) = y$, avec $x \in E$. Il y a deux cas.

- Si $y \in f(M)$, il existe un (unique) $x \in M$ tel que $y = f(x)$. Et alors $y = h(x)$. De plus, y n'est pas de la forme $h(t)$ pour un $t \notin M$, car sinon on aurait $y = g^{-1}(t)$ avec $t \notin M$ et $g^{-1}(t) \in f(M)$, contredisant les équivalences précédentes. On a donc trouvé un unique antécédent à y.
- Si $y \notin f(M)$, alors y ne peut pas s'écrire $h(x)$, avec x dans M. Et si $x \notin M$, on a $y = h(x) \iff y = g^{-1}(x) \iff g(y) = x$. Le seul antécédent envisageable de y par h est donc $g(y)$. Et on a bien $g(y) \notin M$ (toujours grâce aux équivalences précédentes). Ceci conclut ce cas et la démonstration.